Комбинированные приемы решения уравнений с модулем и параметром

▪ *Примеры*

№1. При каких значениях параметра a уравнение $(|x-2|-a-4)(a+6+x^2-4x)=0$ имеет ровно три различных корня?

№2. При каких значениях параметра a уравнение $|x+a^2|=|x^2+a|$ имеет ровно три корня?

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{|x-6|+a-6}{x^2-10x+a^2}=0$ имеет ровно два различных корня.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+a^2+x-7a=|7x+a|$ имеет более двух различных корней.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x^2+a^2-6x-4a|=2x+2a$ имеет четыре различных корня.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-4x^2+8|x|-4=0$ имеет ровно два различных корня.

№7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-ax-2x^2-6a+3x+9|x|=0$ имеет ровно четыре различных решения.

№8. Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения $3x^2-24x+64=a|x-3|$ будет ровно три положительных.

№9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\dfrac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке $(0;\infty)$ имеет более двух корней.

№10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{2}{x+1}=a|x-3|$ на промежутке $[0;\infty)$ имеет более двух корней.

№1. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\left|x-2\right|-a-4\right)\left(a+6+x^2-4x\right)=0$ имеет ровно три различных корня?

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\left|x-2\right|-a-4=0\\ a+6+x^2-4x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}a=\left|x-2\right|-4 & (1)\\ a=-x^2+4x-6 & (2)\end{array}\right.$$

$$x_в=-\frac{4}{-2}=2;\quad a_в=-2$$

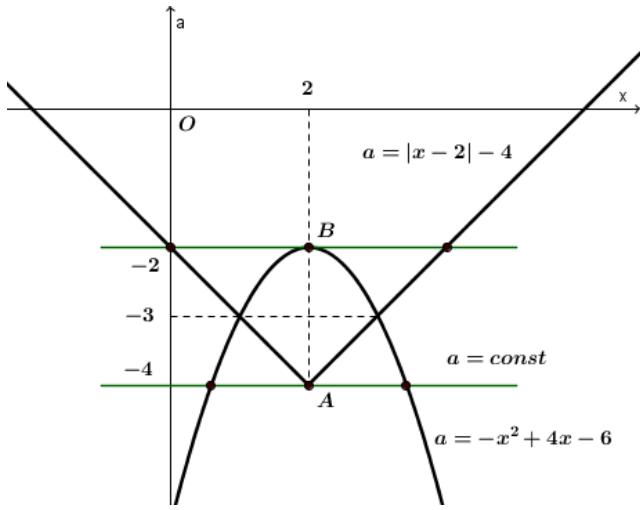
В системе координат xOa построим графики угла (1) с вершиной $\left(2;-4\right)$ и параболы (2) с вершиной $\left(2;-2\right)$.

Прямая $a=const$ проходит через точку $A\left(2;-4\right)$ и пересекает графики уравнений (1) и (2) в трех точках при $a=-4$.

Прямая $a=const$ проходит через точку $B\left(2;-2\right)$ и пересекает графики уравнений (1) и (2) в трех точках при $a=-2$.

При $a<-4,\ a=-3,\ a>-2$ - два решения;

$-4<a<-3,\ \ -3<a<-2$ - четыре решения.



Исходное уравнение имеет ровно три различных корня при $a=-4$ и $a=-2$.

Ответ: -4 и -2.

№2. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x+a^2\right|=\left|x^2+a\right|$ имеет ровно три корня?

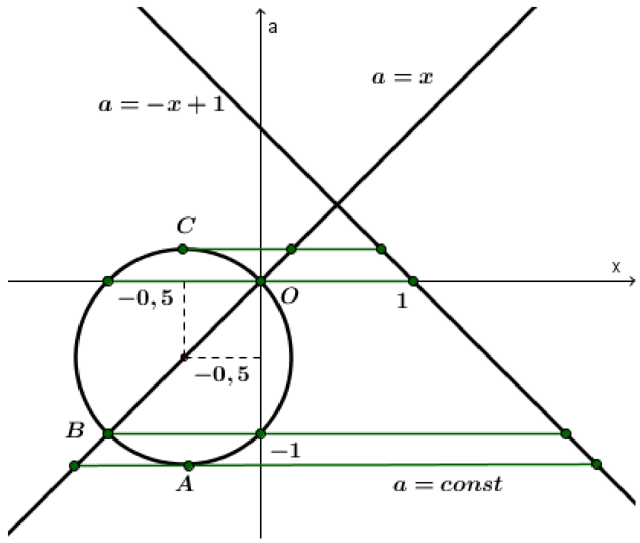
Решение:

$$\left[\begin{array}{l}x+a^2=x^2+a\\ x+a^2=-x^2-a\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\left(x-a\right)\left(x+a-1\right)=0\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}a=x\\ a=-x+1\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\end{array}\right.$$

Введем систему координат $\left(x;a\right)$. Построим в ней графики уравнений совокупности.

$a=x$ и $a=-x+1$ - это прямые и окружность с центром $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Найдем значения a, при которых прямые и окружность имеют три точки пересечения с прямой $a=const$

1) Касание окружности в точках A и C: $a=-\frac{1}{2}-R=-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Прямая $a = const$ пересекает окружность в точках B и O:

$$\begin{cases} a = x \\ x^2 + x + a^2 + x = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} a = x \\ a(a+1) = 0 \end{cases};\quad a = 0,\ a = -1.$$

В случаях $a < -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} < a < \frac{1}{2}$, $a > -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ - два решения;

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < a < -1,\ -1 < a < 0,\ 0 < a < -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ - четыре решения; $a = \frac{1}{2}$ - - одно решение.

Ответ: $-1;\ 0;\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

№3. **Найдите все значения** a**, при каждом из которых уравнение** $\frac{|x-6| + a - 6}{x^2 - 10x + a^2} = 0$ **имеет ровно два различных корня.**

Решение:

$$\frac{|x-6| + a - 6}{x^2 - 10x + a^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-6| + a - 6 = 0 & (1) \\ x^2 - 10x + a^2 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

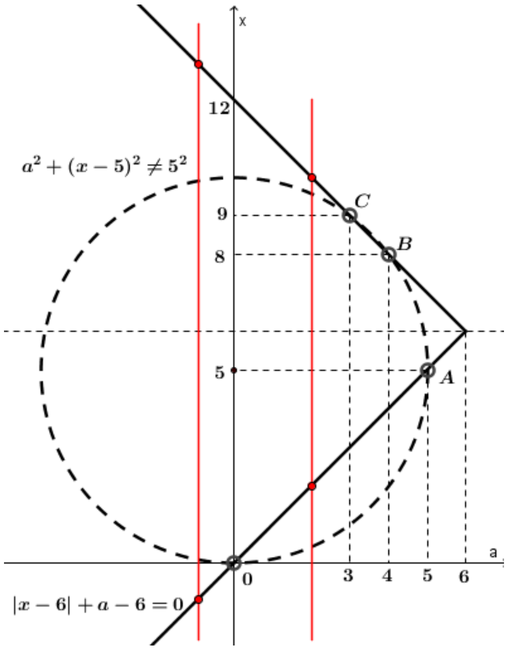
$$(1)\quad |x-6| + a - 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x - 6 \geq 0,\ \ x - 6 + a - 6 = 0 \\ x - 6 < 0,\ \ -x + 6 + a - 6 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 6,\ \ x = -a + 12 \\ x < 6,\ \ x = a \end{array}\right.$$

$$(2)\quad x^2 - 10x + a^2 \neq 0,\ \ x^2 - 10x + 25 + a^2 \neq 25,$$

$$(x-5)^2 + a^2 \neq 5^2$$



В координатной системе aOx изобразим графики уравнени (1) и (2) и найдем координаты их точек пересечения.

$$\begin{cases} x^2 - 10x + a^2 = 0 \\ x = a \end{cases},\quad \begin{cases} a = 0,\ a = 5 \\ x = a \end{cases},\quad \text{O}(0;0)\ \text{и}\ A(5;5)$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + a^2 = 0 \\ x = -a + 12 \end{cases},\quad \begin{cases} a = 3,\ \ a = 4 \\ x = -a + 12 \end{cases},\quad B(4;8)\ \text{и}\ C(3;9)$$

Условие $x^2 - 10x + a^2 \neq 0$ выполнено для корней уравнения $|x-6| + a - 6 = 0$ при всех a, кроме $a = 0,\ a = 3,\ a = 4,\ a = 5$. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a \in (-\infty;0) \cup (0;3) \cup (3;4) \cup (4;5) \cup (5;6)$.

Ответ: $(-\infty;0);(0;3);(3;4);(4;5);(5;6)$.

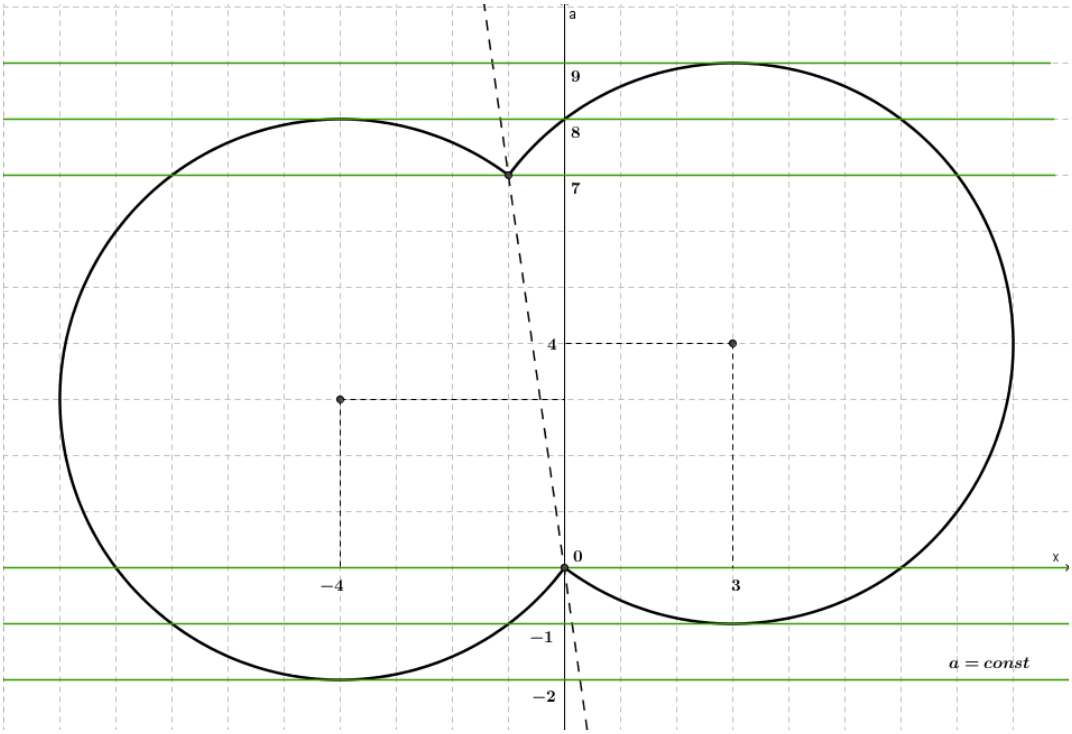
№4. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+a^2+x-7a=|7x+a|$ имеет более двух различных корней.**

Решение:

$$x^2+a^2+x-7a=|7x+a|$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7x+a\ge 0\\ x^2+a^2+x-7a=7x+a\end{cases}\\ \begin{cases}7x+a<0\\ x^2+a^2+x-7a=-7x-a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge -7x\\ x^2-6x+9+a^2-8a+16=25\end{cases}\\ \begin{cases}a<-7x\\ x^2+8x+16+a^2-6a+9=25\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge -7x\\ (x-3)^2+(a-4)^2=25\end{cases}\\ \begin{cases}a<-7x\\ (x+4)^2+(a-3)^2=25\end{cases}\end{array}\right.$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение двух дуг окружностей радиуса 5 и центрами $(3;4)$ и $(-4;3)$, лежащих выше и ниже прямой $a=-7x$ соответственно. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.



Уравнеие не имеет корней при $a<-2$ и $a>9$; один корень при $a=-2$ и $a=9$; имеет два корня при $-2<a<-1,\ 0<a<7,\ 8<a<9$; три корня при $a=-1,\ a=0,\ a=7,\ a=8$; четыре корня при $-1<a<0$ и $7<a<8$.

Таким образом, уравнение имеет более двух различных корней при $a\in[-1;0]\cup[7;8]$.

Ответ: $[-1;0];[7;8]$.

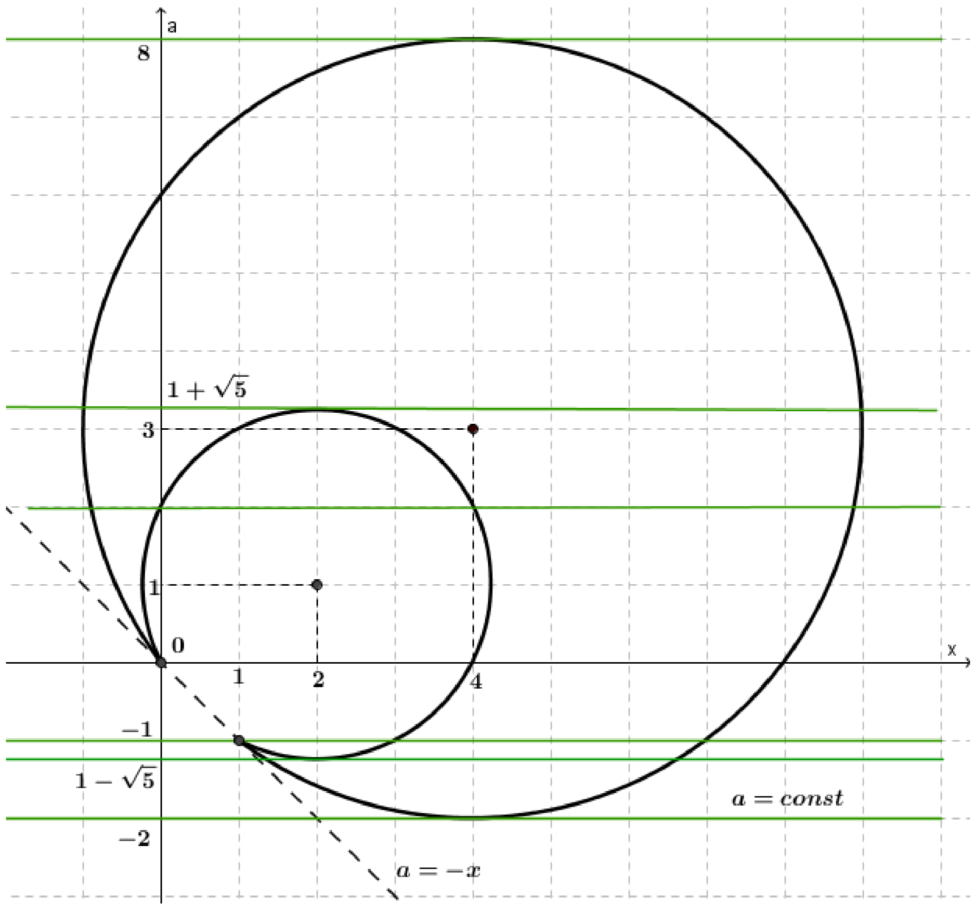
№5. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2+a^2-6x-4a\right|=2x+2a$ имеет четыре различных корня.**

Решение:

$$\left|x^2+a^2-6x-4a\right|=2x+2a \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2a\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+a^2-6x-4a=2x+2a \\ x^2+a^2-6x-4a=-2x-2a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -x \\ \left[\begin{array}{l} x^2-8x+16+a^2-6a+9=25 \\ x^2-4x+4+a^2-2a+1=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -x \\ \left[\begin{array}{l} (x-4)^2+(a-3)^2=5^2 \\ (x-2)^2+(a-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение двух дуг окружностей радиуса 5 и $\sqrt{5}$, и центрами $(4;3)$ и $(2;1)$ соответственно, лежащих выше прямой $a=-x$ соответственно.
Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.



Уравнеие не имеет корней при $a<-2$ и $a>8$; один корень при $a=-2$ и $a=8$; имеет два корня при $-2<a<1-\sqrt{5},\ -1<a<0,\ 1+\sqrt{5}<a<8$; три корня при $a=1-\sqrt{5},\ a=-1,\ a=0,\ a=1+\sqrt{5}$; четыре корня при $1-\sqrt{5}<a<-1$ и $0<a<1+\sqrt{5}$.

Таким образом, уравнение имеет четыре различных корня при $a\in\left(1-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(0;1+\sqrt{5}\right)$.

Ответ: $\left(1-\sqrt{5};-1\right);\left(0;1+\sqrt{5}\right)$.

№6. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-4x^2+8|x|-4=0$ имеет ровно два различных корня.**

Решение:

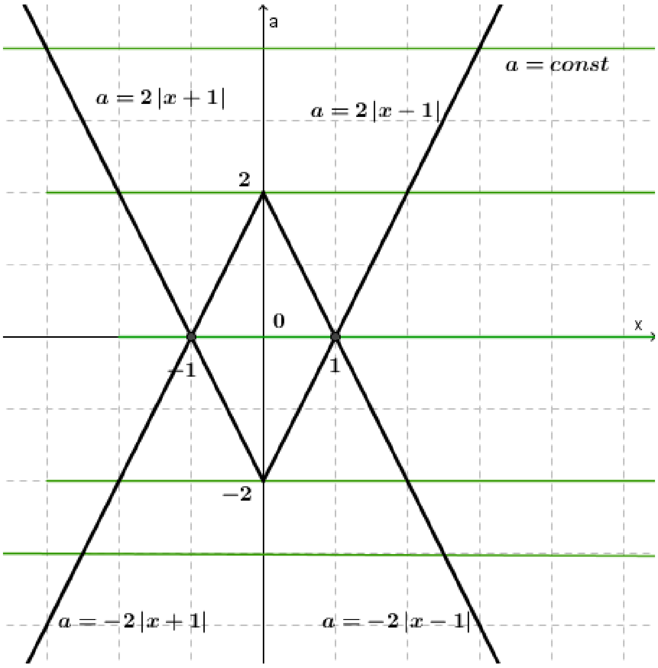
$$a^2-4x^2+8|x|-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2-4x^2+8x-4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2-4x^2-8x-4=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2-4\left(x^2-2x+1\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2-4\left(x^2+2x+1\right)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2=\left(2\left(x-1\right)\right)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2=\left(2\left(x+1\right)\right)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x\ge 0\\ |a|=2|x-1|\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x<0\\ |a|=2|x+1|\end{cases}$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение четырех углов с вершинами $(1;0)$ и $(-1;0)$ соответственно, лежащих правее и левее прямой $x=0$ соответственно с ветвями, направленными вверх и вниз. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.

Уравнеие имеет два корня при $a<-2$, $a=0$, $a>2$; три корня при $a=-2$ и $a=2$; четыре корня при $-2<a<0$ и $0<a<2$.

Таким образом, уравнение имеет ровно два различных корня при $a<-2,\ a=0,\ a>2$.



Ответ: $a<-2,\ a=0,\ a>2$.

№7. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-ax-2x^2-6a+3x+9|x|=0$ имеет ровно четыре различных решения.**

Решение:

$$a^2-ax-2x^2-6a+3x+9|x|=0;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2-ax-2x^2-6a+3x+9x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2-ax-2x^2-6a+3x-9x=0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ -2x^2-x(a-12)+a^2-6a=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ -2x^2-x(a+6)+a^2-6a=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x\ge 0\\ 2x^2+x(a-12)-a^2+6a=0\quad (1)\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x<0\\ 2x^2+x(a+6)-a^2+6a=0\quad (2)\end{cases}$$

$$(1)\quad D=(a-12)^2-4\cdot 2\cdot(6a-a^2)=9a^2-72a+144=(3a-12)^2$$

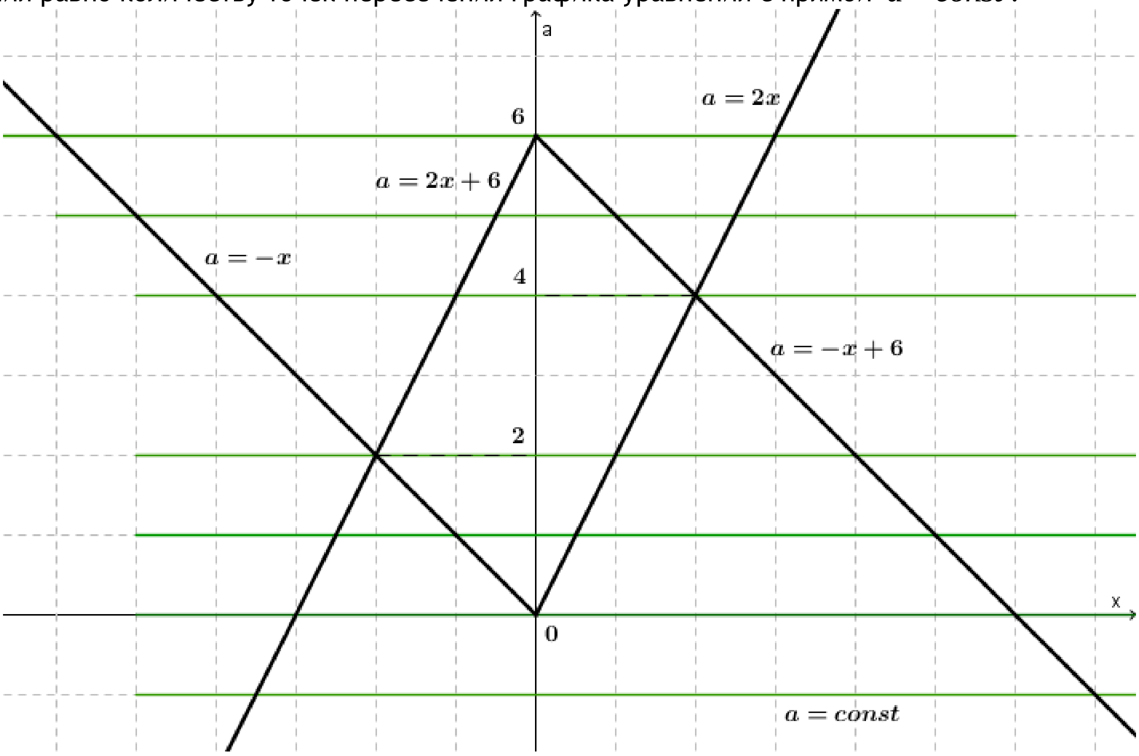
$$x_1=\frac{-(a-12)+3a-12}{4},\ x_1=\frac{a}{2},\ a=2x;\quad x_2=\frac{-(a-12)-3a+12}{4},\ x_2=-a+6,\ a=-x+6$$

$$(2)\quad D=(a+6)^2-4\cdot 2\cdot(6a-a^2)=9a^2-36a+36=(3a-6)^2$$

$$x_1=\frac{-(a+6)+3a-6}{4},\ x_1=\frac{a-6}{2},\ a=2x+6;\quad x_2=\frac{-(a+6)-3a+6}{4},\ x_2=-a,\ a=-x$$

$$\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}a=2x\\ a=-x+6\end{array}\right.\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}a=2x+6\\ a=-x\end{array}\right.\end{cases}$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение четырех лучей. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.



Уравнеие имеет два корня при $a<0$, $a>6$; три корня при $a=0,\ a=2,\ a=4,\ a=6$; четыре корня при $0<a<2,\ \ 2<a<4,\ \ 4<a<6$.

Таким образом, уравнение имеет ровно четыре различных решения при $0<a<2,\ \ 2<a<4,\ \ 4<a<6$.

Ответ: $0<a<2,\ \ 2<a<4,\ \ 4<a<6$.

№8. **Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения $3x^2-24x+64=a|x-3|$ будет ровно три положительных.**

Решение:

Построим графики левой и правой частей уравнения

$$\begin{cases} y=3x^2-24x+64 & (1) \\ y=a|x-3| & (2) \end{cases}.$$

(1) $y=3x^2-24x+64$ графиком является парабола с ветвями, направленными вверх, и вершиной в точке $(4;16)$.

(2) $y=a|x-3|$ графиком является угол с вершиной в точке $(3;0)$.

Уравнение будет иметь решение, если $a>0$. Рассмотрим касание параболы и ветвей ломаной.

Если $x-3\ge 0$, то $|x-3|=x-3$, тогда $y=a(x-3)$ - правая ветвь угла.

Если $x-3<0$, то $|x-3|=3-x$, тогда $y=a(3-x)$ - левая ветвь угла.

а) Касание параболы и правой ветви угла в точке A (рис.1).

$3x^2-24x+64=a(x-3)$, $3x^2-x(a+24)+3a+64=0$.

$D=(a+24)^2-4\cdot 3\cdot(3a+64)=a^2+12a-192,\ \ D=0,\ \ a=-6\pm 2\sqrt{57},\ \ a>0\ \ a=2\sqrt{57}-6$.

При этом левая ветвь не имеет общих точек с параболой, то есть уравнение $3x^2-24x+64=a(3-x)$ корней не имеет при $a=2\sqrt{57}-6$. При $a<2\sqrt{57}-6$ нет общих точек.

б) Касание параболы и левой ветви угла в точке B (рис.2).

$3x^2-24x+64=a(3-x)$, $3x^2+x(a-24)-3a+64=0$

$D=(a-24)^2-4\cdot 3\cdot(64-3a)=a^2-12a-192$, $D=0,\ \ a=6\pm 2\sqrt{57},\ \ a>0\ \ a=6+2\sqrt{57}$.

При этом правая ветвь имеет две точки пересечения с параболой и их абсциссы положительны

Парабола пересекает ось ординат в точке $(0;64)$. Определим значение a, при котором прямая $y=a(3-x)$ проходит через эту же точку: $64=a\cdot 3,\ \ a=21\frac{1}{3}$. Поскольку $6+2\sqrt{57}<21\frac{1}{3}$, то касание прямой $y=a(3-x)$ с параболой происходит раньше, чем пересечение этой прямой с осью ординат и поэтому $x_B>0$. Получим, что при $a=6+2\sqrt{57}$ уравнение имеет три положительных корня.

При $a=21\frac{1}{3}$ уравнение имеет три положительных корня и один корень равный 0, всего 4 корня (рис.3).

При $6+2\sqrt{57}<a<21\frac{1}{3}$ - четыре положительных корня, при $a>21\frac{1}{3}$ - три положительных и один отрицательный корень.

Итак, уравнение имеет ровно три положительных корня при $a=6+2\sqrt{57}$ и $a>21\frac{1}{3}$.

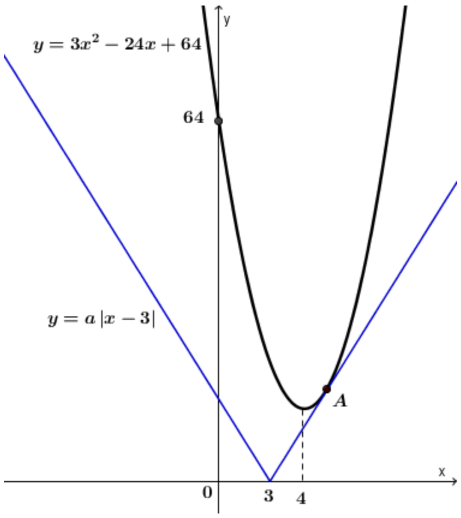


Рис.1

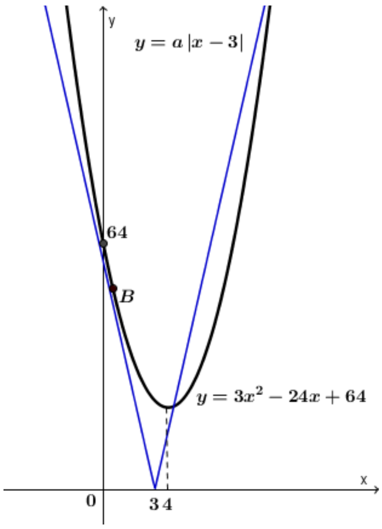


Рис.2

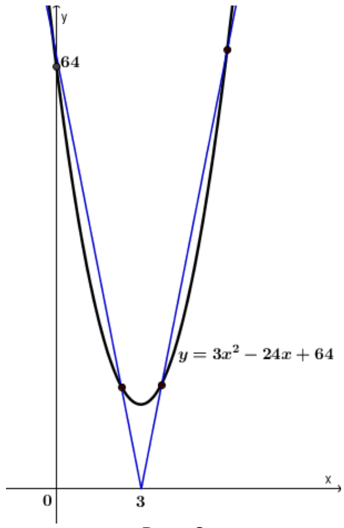
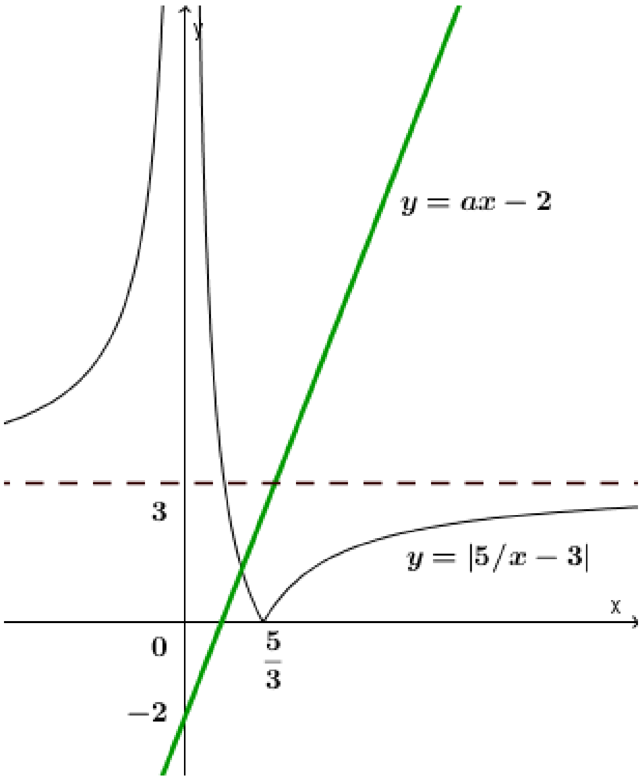


Рис.3

Ответ: $6+2\sqrt{57};\left(21\frac{1}{3};\infty\right)$.

№9. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке $(0;\infty)$ имеет более двух корней.**

Решение:



Рассмотрим функции $f(x)=ax-2$ и $g(x)=\left|\frac{5}{x}-3\right|$.

Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0;\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ - неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0;\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\frac{5}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0;\frac{5}{3}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{5}{3}\right)\ge g\left(\frac{5}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{5}{3}-2\ge 0$, то есть $a\ge\frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{5}{3};\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-2=3-\frac{5}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-5x+5=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=25-20a$, поэтому при $a>\frac{5}{4}$ это уравнение корней не имеет; при $a=\frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0<a<\frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{5}{4}$, то больший корень

$x_2=\frac{5+\sqrt{D}}{2a}>\frac{5}{2a}>2>\frac{5}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{3};\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку тогда и только тогда, когда

$a\left(x_1-\frac{5}{3}\right)\left(x_2-\frac{5}{3}\right)=a\left(\frac{5}{3}\right)^2-5\cdot\frac{5}{3}+5=\frac{25a-30}{9}>0$, то есть $a>\frac{6}{5}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0;\infty)$:

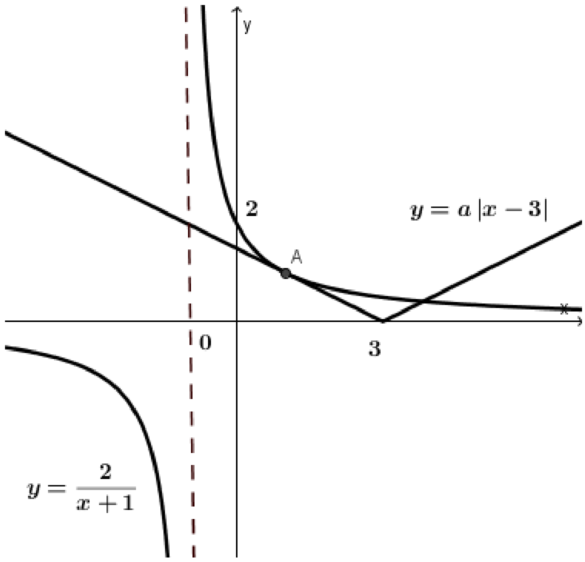
- Нет корней при $a\le 0$;
- Один корень при $0<a<\frac{6}{5}$ и $a>\frac{5}{4}$;
- Два корня при $a=\frac{6}{5}$ и $a=\frac{5}{4}$;
- Три корня при $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$.

№10. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{2}{x+1}=a|x-3|$ на промежутке $[0;\infty)$ имеет более двух корней.**

Решение:

Решим уравнение графически $\begin{cases} f(x)=\frac{2}{x+1} & (1) \\ g(x)=a|x-3| & (2) \end{cases}$.



(1) $f(x)=\frac{2}{x+1}$ - график гипербола, вертикальная асимптота $x=-1$. Пересекает ось y в точке $(0;2)$.

(2) $g(x)=a|x-3|$ - угол с подвижными ветвями, вершина $(3;0)$.

Если $a\le 0$, то на заданном промежутке $[0;\infty)$ уравнение корней не имеет.

Опеделим значение a, при котором происходит касание угла и гиперболой в точке А. На промежутке $[0;3)$ имеем $g(x)=a(3-x)$, тогда решим уравнение

$$\frac{2}{x+1}=a(3-x),\quad ax^2-2ax-3a+2=0$$

$$D/4=a^2-a(-3a+2)=4a^2-2a$$

$$D=0,\quad a=0,\quad a=\frac{1}{2}$$

При $a=0$ уравнение корней не имеет, тогда получаем, что при $a=\frac{1}{2}$ уравнение имеет два корня.

Заметим, что при $a=\frac{1}{2}$ $x_2>3$, а $x_1=1\in[0;3)$. При $0<a<\frac{1}{2}$ уравнение имеет один корень на промежутке $(3;\infty)$.

Определим значение a, при котором ветка угла проходит через точку $(0;2)$: $2=a(3-0)$, $a=\frac{2}{3}$, тогда при $a=\frac{2}{3}$ и при $\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$ уравнение имеет три корня.

Исходное уравнение имеет более двух корней при $\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}$.

▪ *Тест* Комбинированные приемы решения уравнений с модулем и параметром

№1. При каких значениях параметра a уравнение $(a+1-|x-2|)(a+4x-x^2-1)=0$ имеет ровно три различных корня?

№2. При каких значениях параметра a уравнение $|x+a^2|=|x^2-a|$ имеет более трех корней?

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$ имеет ровно два различных корня.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+a^2+2x-4a=|4x+2a|$ имеет более двух различных корней.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+a^2-2x-6a=|6x-2a|$ имеет ровно два различных корня.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x^2+a^2-7x-5a|=x+a$ имеет четыре различных корня.

№7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-9x^2+18|x|-9=0$ имеет ровно два различных корня.

№8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-x^2+2|x|-1=0$ имеет ровно различных корня.

№9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x-4|=\dfrac{5}{x+1}$ на промежутке $[0;\infty)$ имеет ровно два корня.

№10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\dfrac{7}{x}-4\right|=ax-3$ на промежутке $(0;\infty)$ имеет более двух корней.

▪ *Ответы (тест)* Комбинированные приемы решения уравнений с модулем и параметром

№1	№2	№3	№4	№5
-1	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}<a<0,$ $0<a<1,$ $1<a<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$(-2;-1);(-1;0);$ $(0;3);(3;8);$ $(8;\infty)$	$\left[3-\sqrt{10};0\right];$ $\left[4;1+\sqrt{10}\right]$	$\left(2-2\sqrt{5};4-2\sqrt{5}\right);$ $(0;6);\left(2+2\sqrt{5};4+2\sqrt{5}\right)$
№6	**№7**	**№8**	**№9**	**№10**
$\left(2-\sqrt{13};-1\right);$ $\left(0;2+\sqrt{13}\right)$	$a<-3,\ a=0,\ a>3$	$a<-1,\ a=0,\ a>1$	$a=\frac{4}{5},$ $a>\frac{5}{4}$	$\frac{12}{7}<a<\frac{7}{4}$

▪ *Решение (тест)* Комбинированные приемы решения уравнений с модулем и параметром

№1. **При каких значениях параметра a уравнение $\left(a+1-|x-2|\right)\left(a+4x-x^2-1\right)=0$ имеет ровно три различных корня?**

Решение:

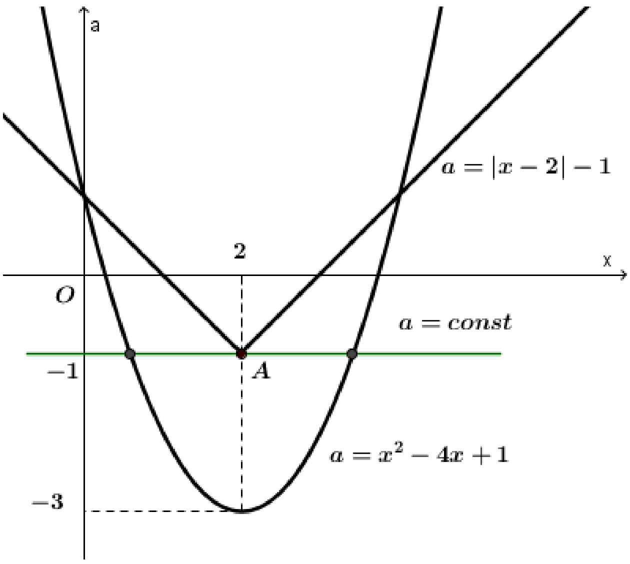
$$\left[\begin{array}{ll} a=x^2-4x+1 & (1) \\ a=|x-2|-1 & (2) \end{array}\right.$$

В системе координат xOa построим графики параболы (1) с вершиной $(2;-3)$ и угла (2) с вершиной $(2;-1)$.

Прямая $a=const$ проходит через точку $A(2;-1)$ и пересекает графики уравнений (1) и (2) в трех точках при $a=-1$.

При $a<-3$ - нет решений; $-3<a<-1$ - два решения; $-1<a<1,\ a>1$ - четыре решения; $a=1$ - два решения.

Исходное уравнение имеет ровно три различных корня при $a=-1$.



Ответ: $a=-1$.

№2. При каких значениях параметра a уравнение $|x+a^2|=|x^2-a|$ имеет более трех корней?

Решение:

$$|x+a^2|=|x^2-a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+a^2=x^2-a \\ x+a^2=-x^2+a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-x-a^2-a=0 & (1) \\ x^2+x+a^2-a=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $x^2-a^2-(x+a)=0,\quad (x-a)(x+a)-(x+a)=0,\quad (x+a)(x-a-1)=0$

$$x_1=-a \quad \text{или} \quad x_2=a+1$$

(2) $x^2+x+a^2-a=0,\ D=1-4\left(a^2-a\right)=-4a^2+4a+1$

$а)$ $D>0,\ -4a^2+4a+1>0 \ \big|\cdot(-1),\ \ 4a^2-4a-1<0,\ \ D/4=4+4=8,\ \ a=\dfrac{2\pm2\sqrt2}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt2}{2}.$

Уравнение (2) имеет два различных корня при $a\in\left(\dfrac{1-\sqrt2}{2};\dfrac{1+\sqrt2}{2}\right).$

$б)$ $D=0,\ -4a^2+4a+1=0,\ x_3=x_4$ при $a=\dfrac{1+\sqrt2}{2}$ и $a=\dfrac{1-\sqrt2}{2}$

$в)$ $D<0,$ уравнение (2) не имеет корней.

Чтобы исходное уравнение имело ровно три корня, рассмотрим следующие ситуации.

Корни ур-я (1) совпадают $x_1=x_2;\ -a=a+1,\ a=-\dfrac12$ корни уравнения (2) при этом различны $\dfrac{1-\sqrt2}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt2}{2}$, но $a=-\dfrac12\notin\left(\dfrac{1-\sqrt2}{2};\dfrac{1+\sqrt2}{2}\right).$

Корни уравнения (2) совпадают $x_3=x_4$ при $a=\dfrac{1\pm\sqrt2}{2}$ и корни уравнения (1) $x_1\neq x_2$

Найдем значение $a,$ при которых совпадают корни уравнения (1) и (2)

$$\begin{cases} x+a^2=x^2-a \\ x+a^2=-x^2+a \end{cases};\ \begin{cases} x^2-x-a-a^2=0 \\ x^2+x-a+a^2=0 \end{cases};\ -2x-2a^2=0,\ x_o=-a^2$$

Подставим в одно из уравнений системы

$-a^2+a^2=\left(-a^2\right)^2-a,\ \ a^4-a=0,\ \ a\left(a^3-1\right)=0$

$$a=0 \quad \text{или} \quad a=1$$

При $a=0$ уравнение имеет три корня $x=-1,\ x=0,\ x=1.$

При $a=1$ уравнение имеет три корня $x=-1,\ x=0,\ x=2.$

Т.о, исходное уравнение , будет имеють более трех корней

при $\dfrac{1-\sqrt2}{2}<a<0,\ 0<a<1,\ 1<a<\dfrac{\sqrt2+1}{2}.$

Ответ: $\dfrac{1-\sqrt2}{2}<a<0,\ 0<a<1,\ 1<a<\dfrac{\sqrt2+1}{2}.$

№3. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$ имеет ровно два различных корня.**

Решение:

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}|3x|-2x-2-a=0 & (1)\\ x^2-2x-a\neq 0 & (2)\end{cases}$$

$(1)\quad |3x|-2x-2-a=0$

$$\left[\begin{array}{l} x\geq 0,\ \ 3x-2x-2-a=0\\ x<0,\ \ -3x-2x-2-a=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x\geq 0,\ \ a=x-2\\ x<0,\ \ a=-5x-2\end{array}\right.$$

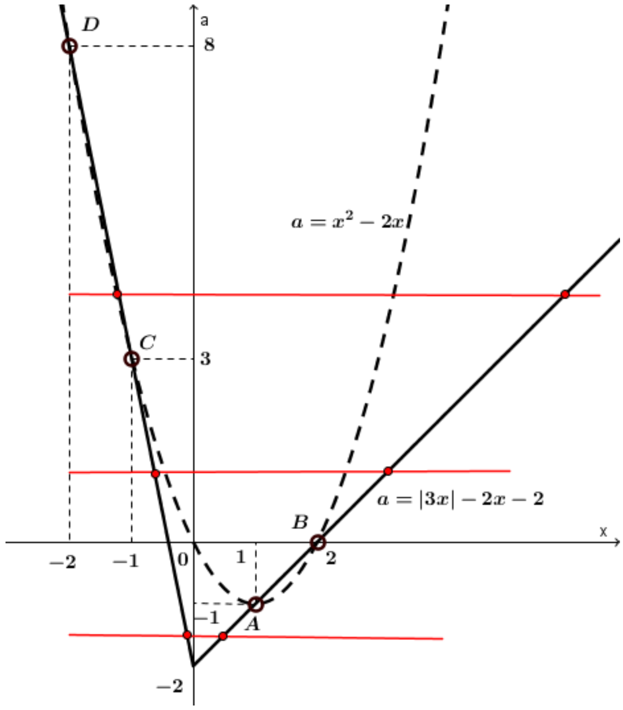
$(2)\quad x^2-2x-a\neq 0,\ \ a\neq x^2-2x,$

В координатной системе xOa изобразим графики уравнений (1) и (2) и найдем координаты их точек пересечения.

$$\begin{cases}a=x^2-2x\\ a=x-2\end{cases},\ \begin{cases}x=1,\ x=2\\ a=x-2\end{cases},\ A(1;-1) \text{ и } B(2;0)$$

$$\begin{cases}a=x^2-2x\\ a=-5x-2\end{cases},\ \begin{cases}x=-1,\ x=-2\\ a=-5x-2\end{cases},\ C(-1;3) \text{ и } D(-2;8)$$

Условие $x^2-2x-a\neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x|-2x-2-a=0$ при всех a, кроме $a=-1,\ a=0,\ a=3,\ a=8$.



Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при

$a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;\infty)$.

Ответ: $(-2;-1);(-1;0);(0;3);(3;8);(8;\infty)$

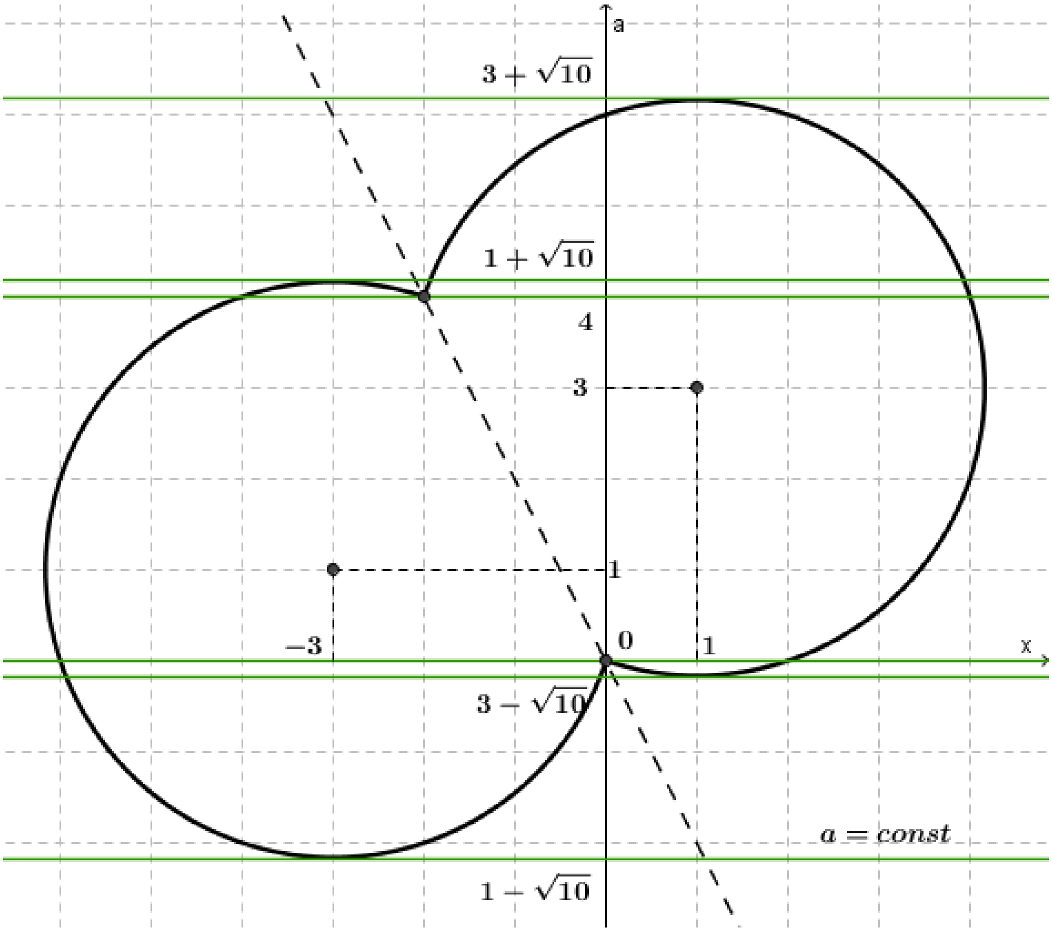
№4. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+a^2+2x-4a=|4x+2a|$ имеет более двух различных корней.**

Решение:

$x^2+a^2+2x-4a=|4x+2a|$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x+2a\ge 0\\ x^2+a^2+2x-4a=4x+2a\end{cases}\\ \begin{cases}4x+2a<0\\ x^2+a^2+2x-4a=-4x-2a\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge -2x\\ x^2-2x+1+a^2-6a+9=10\end{cases}\\ \begin{cases}a<-2x\\ x^2+6x+9+a^2-2a+1=10\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge -2x\\ (x-1)^2+(a-3)^2=10\end{cases}\\ \begin{cases}a<-2x\\ (x+3)^2+(a-1)^2=10\end{cases}\end{array}\right.$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение двух дуг окружностей радиуса $\sqrt{10}$ и центрами $(1;3)$ и $(-3;1)$, лежащих выше и ниже прямой $a=-2x$ соответственно. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.



Уравнеие не имеет корней при $a<1-\sqrt{10}$ и $a>3+\sqrt{10}$; один корень при $a=1-\sqrt{10}$ и $a=3+\sqrt{10}$; имеет два корня при $1-\sqrt{10}<a<3-\sqrt{10},\ 0<a<4,\ 1+\sqrt{10}<a<3+\sqrt{10}$; три корня при $a=3-\sqrt{10},\ a=0,\ a=4,\ a=1+\sqrt{10}$; четыре корня при $-3-\sqrt{10}<a<0$ и $4<a<1+\sqrt{10}$.

Таким образом, уравнение имеет более двух различных корней при $a\in\left[3-\sqrt{10};0\right]\cup\left[4;1+\sqrt{10}\right]$.

Ответ: $\left[3-\sqrt{10};0\right];\left[4;1+\sqrt{10}\right]$.

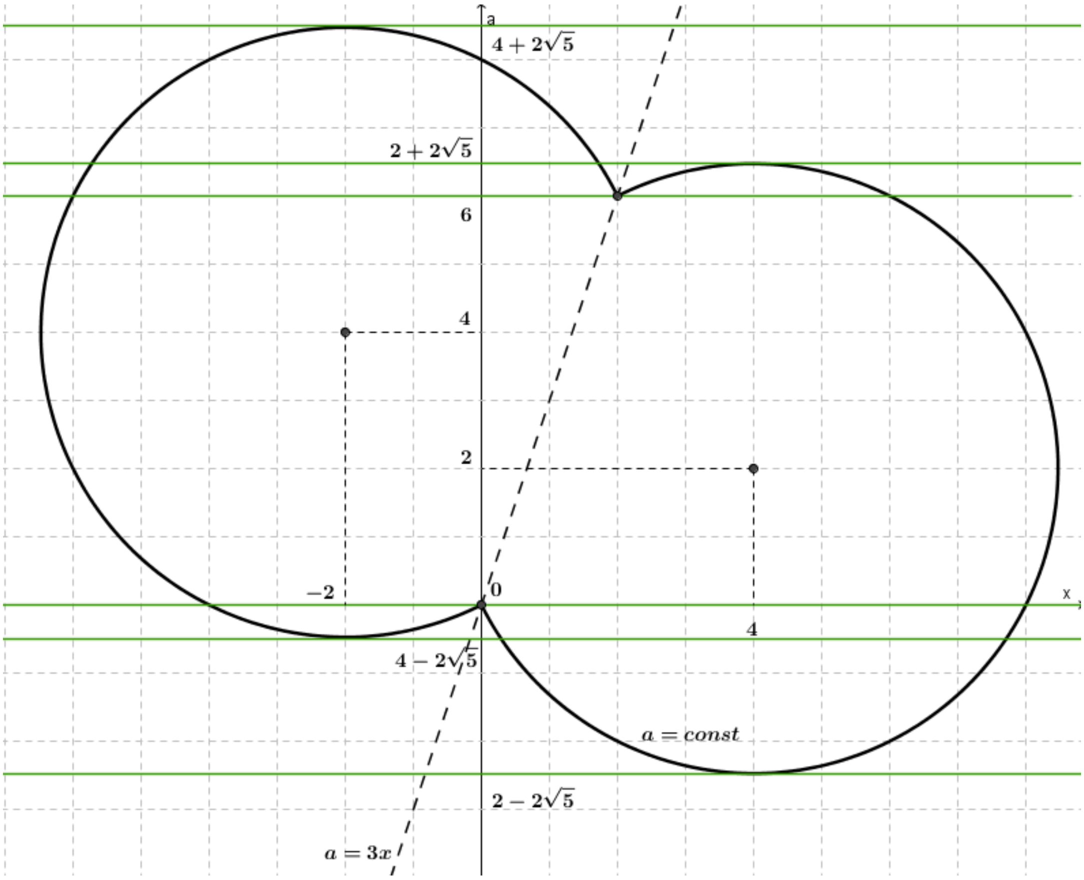
№5. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+a^2-2x-6a=|6x-2a|$ имеет ровно два различных корня.**

Решение:

$$x^2+a^2-2x-6a=|6x-2a|$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6x-2a\ge 0\\ x^2+a^2-2x-6a=6x-2a\end{cases}\\ \begin{cases}6x-2a<0\\ x^2+a^2-2x-6a=-6x+2a\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le 3x\\ x^2-8x+16+a^2-4a+4=20\end{cases}\\ \begin{cases}a>3x\\ x^2+4x+4+a^2-8a+16=20\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le 3x\\ (x-4)^2+(a-2)^2=20\end{cases}\\ \begin{cases}a>3x\\ (x+2)^2+(a-4)^2=20\end{cases}\end{array}\right.$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение двух дуг окружностей радиуса $2\sqrt{5}$ и центрами $(4;2)$ и $(-2;4)$, лежащих ниже и выше прямой $a=3x$ соответственно. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.



Уравнеие не имеет корней при $a<2-2\sqrt{5}$ и $a>4+2\sqrt{5}$; один корень при $a=2-2\sqrt{5}$ и $a=4+2\sqrt{5}$; имеет два корня при $2-2\sqrt{5}<a<4-2\sqrt{5},\ 0<a<6,\ 2+2\sqrt{5}<a<4+2\sqrt{5}$; три корня при $a=4-2\sqrt{5},\ a=0,\ a=6,\ a=2+2\sqrt{5}$; четыре корня при $4-2\sqrt{5}<a<0$ и $6<a<2+2\sqrt{5}$.
Таким образом, уравнение имеет более двух различных корней при
$a\in\left(2-2\sqrt{5};4-2\sqrt{5}\right)\cup(0;6)\cup\left(2+2\sqrt{5};4+2\sqrt{5}\right)$.

Ответ: $\left(2-2\sqrt{5};4-2\sqrt{5}\right);(0;6);\left(2+2\sqrt{5};4+2\sqrt{5}\right)$.

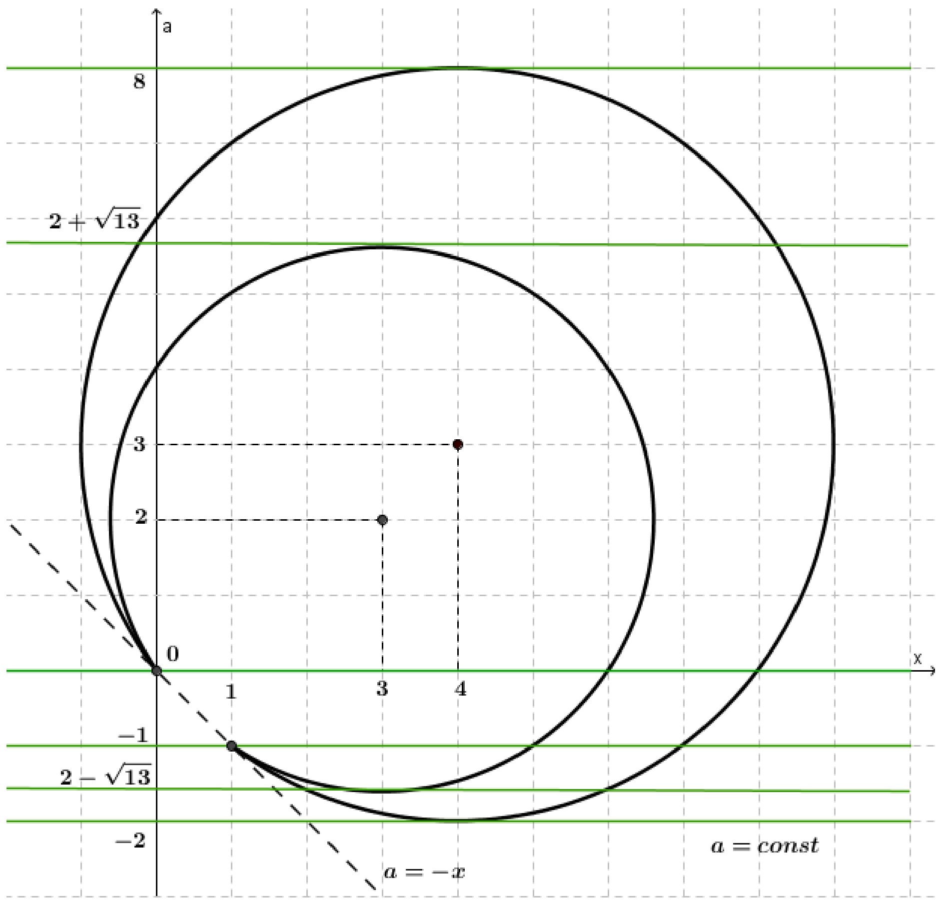
№6. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2+a^2-7x-5a\right|=x+a$ имеет четыре различных корня.**

Решение:

$$\left|x^2+a^2-7x-5a\right|=x+a \Leftrightarrow \begin{cases} x+a\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+a^2-7x-5a=x+a \\ x^2+a^2-7x-5a=-x-a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -x \\ \left[\begin{array}{l} x^2-8x+16+a^2-6a+9=25 \\ x^2-6x+9+a^2-4a+4=13 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -x \\ \left[\begin{array}{l} (x-4)^2+(a-3)^2=5^2 \\ (x-3)^2+(a-2)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение двух дуг окружностей радиуса 5 и $\sqrt{13}$ и центрами $(4;3)$ и $(3;2)$ соответственно, лежащих выше прямой $a=-x$ соответственно. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.



Уравнеие не имеет корней при $a<-2$ и $a>8$; один корень при $a=-2$ и $a=8$; имеет два корня при $-2<a<2-\sqrt{13},\ -1<a<0,\ 2+\sqrt{13}<a<8$; три корня при $a=2-\sqrt{13},\ a=-1,\ a=0,\ a=2+\sqrt{13}$; четыре корня при $2-\sqrt{13}<a<-1$ и $0<a<2+\sqrt{13}$.

Таким образом, уравнение имеет четыре различных корня при $a\in\left(2-\sqrt{13};-1\right)\cup\left(0;2+\sqrt{13}\right)$.

Ответ: $\left(2-\sqrt{13};-1\right);\left(0;2+\sqrt{13}\right)$.

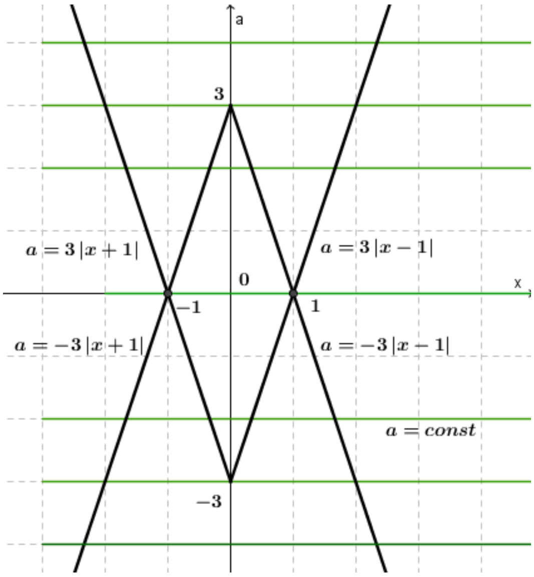
№7. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-9x^2+18|x|-9=0$ имеет ровно два различных корня.**

Решение:

$$a^2-9x^2+18|x|-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2-9x^2+18x-9=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2-9x^2-18x-9=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2-9\left(x^2-2x+1\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2-9\left(x^2+2x+1\right)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2=\left(3(x-1)\right)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2=\left(3(x+1)\right)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x\ge 0\\ |a|=3|x-1|\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x<0\\ |a|=3|x+1|\end{cases}$$

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение четырех углов с вершинами $(1;0)$ и $(-1;0)$ соответственно, лежащих правее и левее прямой $x=0$ соответственно с ветвями, направленными вверх и вниз. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.



Уравнеие имеет два корня при $a<-3$, $a=0,\ a>3$; три корня при $a=-3$ и $a=3$; четыре корня при $-3<a<0$ и $0<a<3$.

Таким образом, уравнение имеет ровно два различных корня при $a<-3,\ a=0,\ a>3$.

Ответ: $a<-3$, $a=0,\ a>3$.

№8. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-x^2+2|x|-1=0$ имеет ровно различных корня.**

Решение:

$$a^2-x^2+2|x|-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2-x^2+2x-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2-x^2-2x-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2-\left(x^2-2x+1\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2-\left(x^2+2x+1\right)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a^2=(x-1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a^2=(x+1)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x\ge 0\\ |a|=|x-1|\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x<0\\ |a|=|x+1|\end{cases}$$

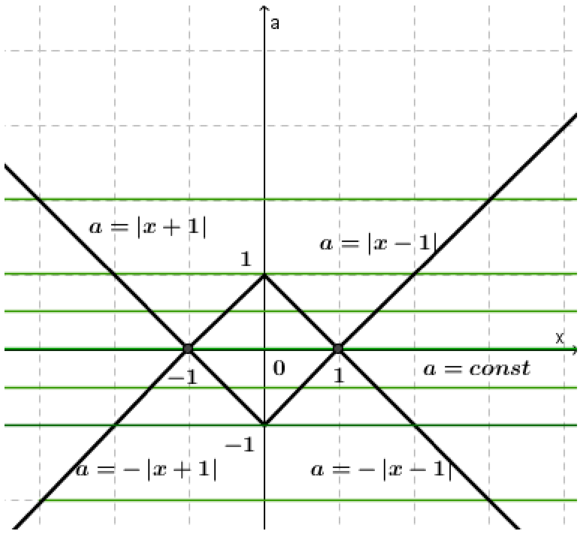
Решение:

В системе координат xOa исходное уравнение задает объединение четырех углов с вершинами $(1;0)$ и $(-1;0)$ соответственно, лежащих правее и левее прямой $x=0$ соответственно с ветвями, направленными вверх и вниз. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с прямой $a=const$.

Уравнеие имеет два корня при $a<-1$, $a=0$, $a>1$; три корня при $a=-1$ и $a=1$; четыре корня при $-1<a<0$ и $0<a<1$.

Таким образом, уравнение имеет ровно два различных корня при $a<-1$, $a=0$, $a>1$.

Ответ: $a<-1$, $a=0$, $a>1$.

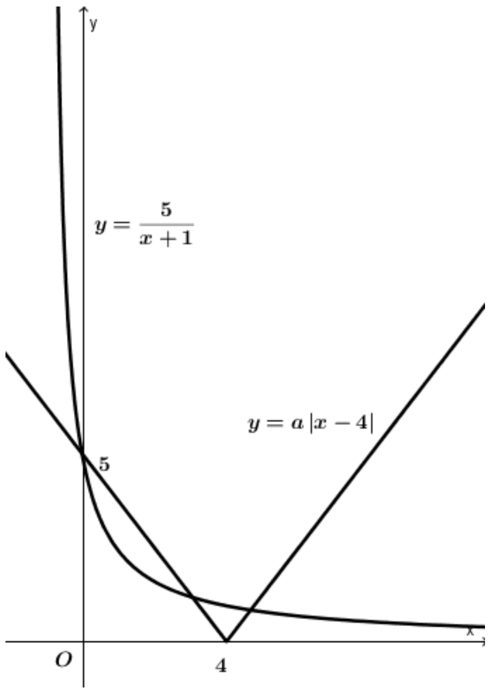


№9. **Найдите все значения** a**, при каждом из которых уравнение** $a|x-4|=\frac{5}{x+1}$ **на промежутке** $[0;\infty)$ **имеет ровно два корня.**

Решение:

При $a\le 0$ уравнение не имеет неотрицательных корней, так как его левая часть неположительна, а правая положительна. Определим, для каких положительных значений a графики функций $y=a|x-4|$ и $y=\frac{5}{x+1}$ имеют ровно две общие точки на области $x\ge 0$. График функции $y=\frac{5}{x+1}$ - гипербола, ее горизонтальная асимптота $y=0$, вертикальная - $x=-1$. При всех положительных значениях параметра уравнение имеет положительный корень больший числа 4. Чтобы уравнение имело ровно два неотрицательных решения, значения параметра должны обеспечивать существование ровно одного второго корня на промежутке $[0;4)$. Заметим, что на этом промежутке $|x-4|=4-x$.

Определим вначале значения параметра, соответствующие касанию прямой $y=a(4-x)$ и гиперболы:



$$a|x-4|=\frac{5}{x+1} \Leftrightarrow a(4-x)(x+1)=5;\ ax^2-3ax+5-4a=0.$$

Заметим, что касанию прямой и гиперболы соответствует нуль дискриминанта полученного квадратного уравнения. $D=9a^2-4a(5-4a)=5a(5a-4)$, $D=0,\ \ a=\frac{4}{5}$.

Определим значения параметра a, при котором прямая $y=a(4-x)$ проходит через точку $(0;5)$:

$$y(0)=5,\ \ a|0-4|=5,\ \ a=\frac{5}{4}.$$

Итак, при $a=\frac{4}{5}$ и $a>\frac{5}{4}$ уравнение имеет ровно два неотрицательных решения.

Ответ: $a=\frac{4}{5}$ и $a>\frac{5}{4}$.

№10. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{7}{x}-4\right|=ax-3$ на промежутке $(0;\infty)$ имеет более двух корней.**

Решение:

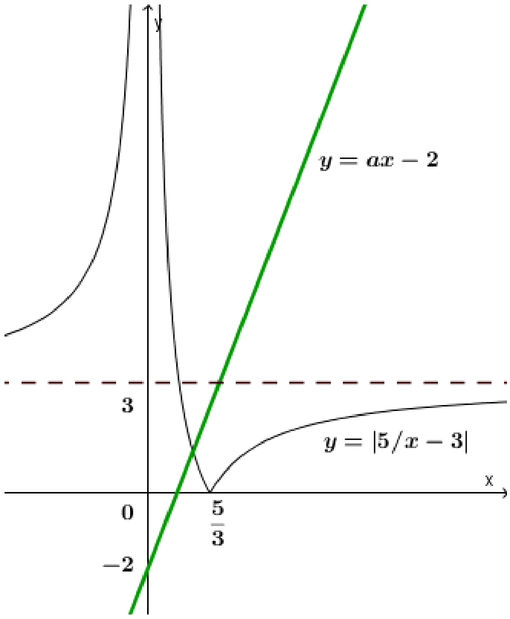
Рассмотрим функции $f(x)=ax-3$ и $g(x)=\left|\frac{7}{x}-4\right|$.

Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0;\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ - неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0;\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\frac{7}{4}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0;\frac{7}{4}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{7}{4}\right)\ge g\left(\frac{7}{4}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{7}{4}-3\ge 0$, то есть $a\ge\frac{12}{7}$. На промежутке $\left(\frac{7}{4};\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-3=4-\frac{7}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-7x+7=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=49-28a$, поэтому при $a>\frac{7}{4}$ это уравнение корней не имеет; при $a=\frac{7}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0<a<\frac{7}{4}$ уравнение имеет два корня. Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{7}{4}$, то больший корень $x_2=\frac{7+\sqrt{D}}{2a}>\frac{7}{2a}>2>\frac{7}{4}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4};\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1-\frac{7}{4}\right)\left(x_2-\frac{7}{4}\right)=a\left(\frac{7}{4}\right)^2-7\cdot\frac{7}{4}+7=\frac{49a-84}{16}>0,$$ то есть $a>\frac{12}{7}$.



Таким образом, уравнение $\left|\frac{7}{x}-4\right|=ax-3$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0;\infty)$:

- Нет корней при $a\le 0$;
- Один корень при $0<a<\frac{12}{7}$ и $a>\frac{7}{4}$;
- Два корня при $a=\frac{12}{7}$ и $a=\frac{7}{4}$;
- Три корня при $\frac{12}{7}<a<\frac{7}{4}$.

Ответ: $\frac{12}{7}<a<\frac{7}{4}$.