Комбинированные уравнения с параметром

- ***Примеры***

1. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)=a+2\sin^2\left(2^{2x-x^2-1}\right)$ имеет хотя бы одно решение.

---

2. При каких значениях параметра a уравнение $(\sin x-\log_4 a)(\sin x-2+2a)=0$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

---

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\sin^2 x+2\cos x+a\right|=\sin^2 x+\cos x-a$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень.

---

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\cos x+2\sin x-a\right|=2\cos x+\sin x+a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

---

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}\cdot\cos x$ имеет единственное решение на отрезке $[0;\pi]$.

---

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $tg(\pi x)\cdot\ln(x+a)=\ln(x+a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.

1. **Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)=a+2\sin^2\left(2^{2x-x^2-1}\right)$ имеет хотя бы одно решение.**

Решение:
Преобразуем уравнение

$$\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)-2\sin^2\left(2^{2x-x^2-1}\right)=a$$

$$\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)-2\cdot\frac{1-\cos\left(2\cdot 2^{2x-x^2-1}\right)}{2}=a$$

$$\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)+\cos\left(2^{2x-x^2}\right)=a+1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2^{2x-x^2}\right)=\frac{a+1}{2}$$

$$t=2^{2x-x^2},\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a+1}{2}$$

Оценим аргумент, а через него и значение функции $\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$.

$$t+\frac{\pi}{6}=2^{2x-x^2}+\frac{\pi}{6}=2^{-(x-1)^2+1}+\frac{\pi}{6}$$

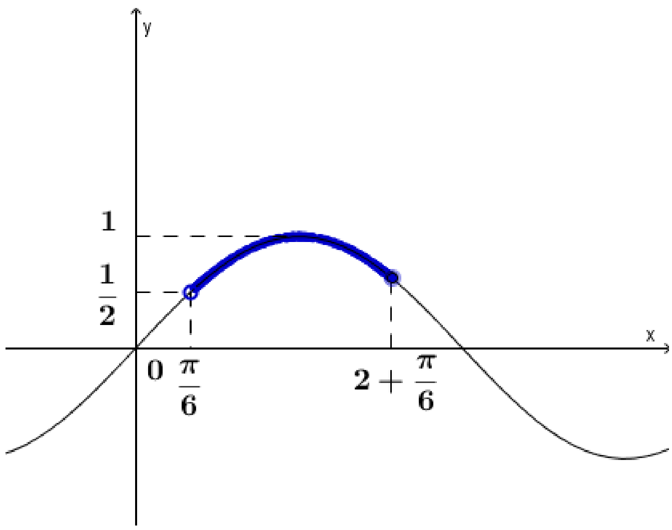
$$-(x-1)^2\le 0,\quad -(x-1)^2+1\le 1,$$

$$0<2^{-(x-1)^2+1}\le 2,$$

$$\frac{\pi}{6}<2^{-(x-1)^2+1}+\frac{\pi}{6}\le 2+\frac{\pi}{6},$$

$$\sin\frac{\pi}{6}<\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\le\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}<\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$$



Уравнение будет иметь хотя бы одно решение, если

$$\frac{1}{2}<\frac{a+1}{2}\le 1\Leftrightarrow 0<a\le 1$$

Ответ: $(0;1]$.

2. **При каких значениях параметра a уравнение $(\sin x-\log_4 a)(\sin x-2+2a)=0$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.**

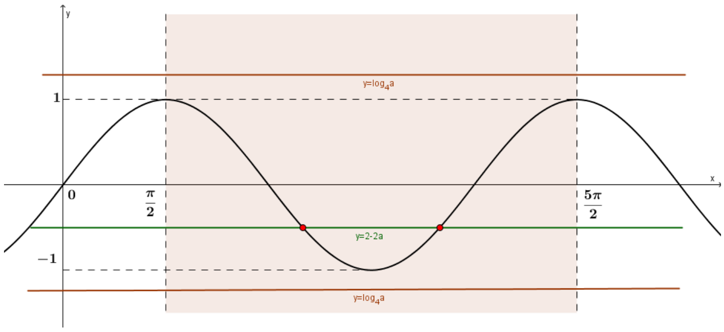
Решение: ОДЗ: $a>0$.

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin x=\log_4 a$ (1) и $\sin x=2-2a$ (2) при $a>0$. На координатной плоскости изобразим график синусоиды $y=\sin x$ и две прямые $y=\log_4 a$ и $y=2-2a$. Рассмотрим возможные случаи их взаимного расположения.

I. Уравнение (1) корней не имеет, а уравнение (2) имеет два корня на заданном отрезке

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_4 a>1\\ \log_4 a<-1\end{array}\right.\\ -1<2-2a\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>4\\ 0<a<\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\\ \dfrac{1}{2}<a\le\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing,$$ т.е.

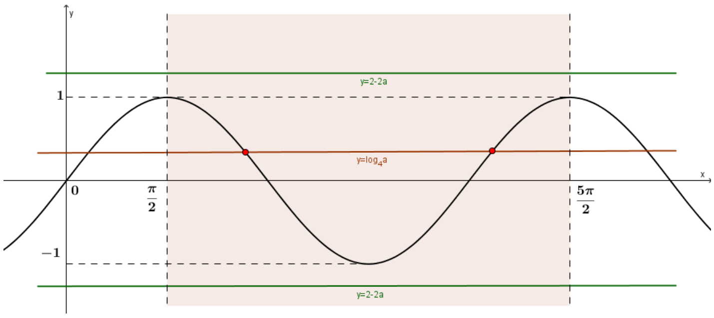
нет таких значений a, при которых возможно такое расположение графиков.



II. Уравнение (2) корней не имеет, а уравнение (1) имеет два корня на заданном отрезке.

2) $$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2-2a<-1\\ 2-2a>1\end{array}\right.\\ -1<\log_4 a\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>\dfrac{3}{2}\\ a<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ \dfrac{1}{4}<a\le 4\end{cases}\Leftrightarrow$$

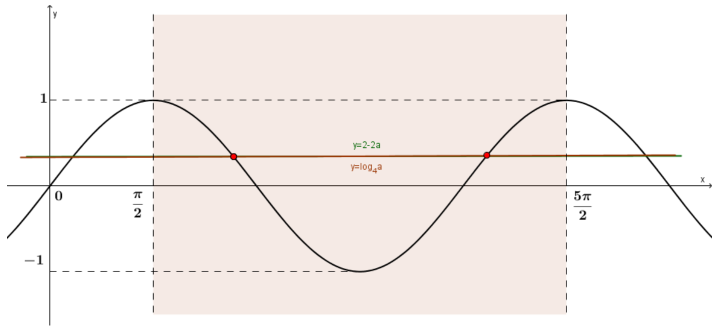
$$\Leftrightarrow a\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};4\right]$$



III. Решения уравнений (1) и (2) совпадают $\log_4 a=2-2a$ и при этом прямые пересекают синусоиду два раза

$$\begin{cases}-1<\log_4 a\le 1\\ -1<2-2a\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le a<\frac{3}{2}.$$

Логарифмическая функция $\log_4 a$ возрастающая $(4>1)$, а линейная функция $2-2a$ убывающая $(-2<0)$, значит, если есть решение на области определения $(a>0)$, то оно единственно.



Подбором находим, что $a=1$.

Проверка: $\log_4 1=2-2\cdot 1$, верно.

При $a=1$ заданному отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежит два корня π и 2π.

IV. Когда прямые находятся по разные стороны от синусоиды
$\begin{cases}\log_4 a < -1\\ 2-2a > 1\end{cases}$ или $\begin{cases}\log_4 a > 1\\ 2-2a < -1\end{cases}$, т.е. при $a < \frac{1}{4}$ и $a > 4$, то решений нет.

V. При $a = \frac{1}{4}$ уравнение (1) $\sin x = \log_4 a$ на заданном отрезке имеет единственный корень, равный $\frac{3\pi}{2}$, а уравнение (2) $\sin x = 2-2a$ корней не имеет.

VI. Уравнение имеет четыре решения, когда прямые различны и обе пересекают синусоиду два раза
$$\begin{cases}\log_4 a \neq 2-2a\\ -1 < \log_4 a \le 1\\ -1 < 2-2a \le 1\end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{2};1\right) \cup \left(1;\frac{3}{2}\right).$$

VII. При $a = \frac{3}{2}$ уравнение (1) $\sin x = \log_4 a$ на заданном отрезке имеет два корня, а уравнение (2) $\sin x = 2-2a$ имеет один корень, значит исходное уравнение имеет три корня.

Итак, исходное уравнение имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ при $a \in \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2};4\right]$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2};4\right]$.

3. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение**

$\left|\sin^2 x + 2\cos x + a\right| = \sin^2 x + \cos x - a$ **имеет на промежутке** $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ **единственный корень.**

Решение:

Раскроем модуль.

(1) Если $\sin^2 x + 2\cos x + a \ge 0$, то уравнение примет вид $\sin^2 x + 2\cos x + a = \sin^2 x + \cos x - a$,

$\cos x = -2a$.

Уравнение $\cos x = -2a$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ имеет единственный корень $x = \arccos(-2a)$, если

$-1 \le 2a < 0,\ 0 < a \le \frac{1}{2}$.

Проверим условие (1), подставив $\cos x = -2a$.

$$\sin^2 x + 2\cos x + a \ge 0$$

$$1 - \cos^2 x + 2\cos x + a \ge 0$$

$$1 - 4a^2 - 4a + a \ge 0$$

$$4a^2 + 3a - 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le a \le \frac{1}{4}.$$

Итак, при $0 < a \le \frac{1}{4}$ исходное уравнение на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ имеет один корень $x = \arccos(-2a)$ и не имеет корней при $a \le 0$ и при $a > \frac{1}{4}$.

(2) Если $\sin^2 x + 2\cos x + a < 0$, то исходное уравнение примет вид

$$\sin^2 x + 2\cos x + a = -\sin^2 x - \cos x + a$$

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ имеет единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$.

Подставим его в неравенство $\sin^2 x + 2\cos x + a < 0$, получим: $\frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + a < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{4}$.

В этом случае уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ и не имеет корней при $a \ge \frac{1}{4}$.

3) Исходное уравнение на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: при $a \le 0$ имеет единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$; при $0 < a < \frac{1}{4}$ имеет два различных корня $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \arccos(-2a)$; при $a = \frac{1}{4}$ имеет единственный корень $x = \arccos(-2a)$; при $a > \frac{1}{4}$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty; 0]; \frac{1}{4}$.

4. **Найдите все значения** a **, при каждом из которых уравнение** $|\cos x + 2\sin x - a| = 2\cos x + \sin x + a$ **имеет хотя бы одно решение на промежутке** $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$**.**

Решение: $$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos x + \sin x + a \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x + 2\sin x - a = 2\cos x + \sin x + a \quad (1) \\ \cos x + 2\sin x - a = -2\cos x - \sin x - a \quad (2) \end{array} \right. \end{cases}.$$

Уравнение (2) сводится к уравнению $tgx = -1$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ корней нет.

Уравнение (1) сводится к уравнению $\sin x - \cos x = 2a$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = a\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2} \qquad .$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a$$

Т.к. $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}$ и $-\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{2}$.

Значит, уравнение имеет корень на этом промежутке если $-\frac{1}{2} < a \le \frac{1}{2}$.

Докажем, что при найденных значениях *a* неравенство $2\cos x + \sin x + a \ge 0$ выполняется.

$(2\cos x + \sin x)^2 = 4\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x\cos x = 1 + 3\cos^2 x + 4\sin x\cos x \ge 1$, т.к. при $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ имеем, что $\cos x \ge 0$ и $\sin x > 0$.

Получаем: $(2\cos x + \sin x)^2 \ge 1$, $2\cos x + \sin x \ge 1$; $2\cos x + \sin x + a > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

5. **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}\cdot\cos x$ имеет единственное решение на отрезке $[0;\pi]$.**

Решение:

1) Преобразуем уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x-\sqrt{x-a}\cdot\cos x=0$$

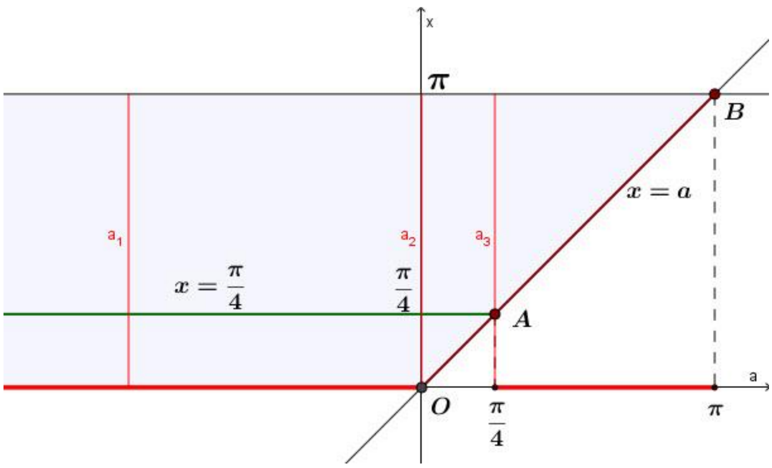
$$\sqrt{x-a}\cdot(\sin x-\cos x)=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-a}=0\\ \sin x-\cos x=0;\end{array}\right.\\ x-a\ge 0\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a\\ tgx=1;\end{array}\right.\\ x\ge a\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ x\ge a\end{cases}$$

Из серии $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ при $k=0$ отрезку $[0;\pi]$ принадлежит только один корень $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Получим $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.\\ x\ge a\end{cases}$ $(*)$, при условии, что $0\le x\le\pi$.

2) В системе координат $(a;x)$ определим графически, когда система (*) имеет единственное решение. На рисунке закрашенная область - это множество точек координатной плоскости, удовлетворяющее условиям $0\le x\le\pi$ и $x\ge a$. В этой области изобразим прямые $x=a$ и $x=\dfrac{\pi}{4}$. Перпендикулярно оси a проведем прямую $a=const$. При $a<0$ прямая $a=const$ пересекает только прямую $x=\dfrac{\pi}{4}$, значит и система (*) имеет единственное решение. При $0\le a<\dfrac{\pi}{4}$ прямая $a=const$ пересекает прямые $x=\dfrac{\pi}{4}$ и $x=a$ в двух точках. При $a=\dfrac{\pi}{4}$ все прямые пересекаются в точке А. При $\dfrac{\pi}{4}<a\le\pi$ прямая $a=const$ пересекает только прямую $x=a$.



Тогда исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$ при $a<0$ и $\dfrac{\pi}{4}\le a\le\pi$.

Ответ: $a<0$ и $\dfrac{\pi}{4}\le a\le\pi$.

6. **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $tg(\pi x)\cdot\ln(x+a)=\ln(x+a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.**

Решение:

1) Преобразуем уравнение $tg(\pi x)\cdot\ln(x+a)=\ln(x+a)$, $\ln(x+a)(tg(\pi x)-1)=0$

$$\begin{cases} x+a>0 \\ \cos(\pi x)\neq 0 \\ \ln(x+a)=0,\ tg(\pi x)-1=0 \end{cases};\quad \begin{cases} x>-a \\ \pi x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z} \\ x+a=1,\ \pi x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases};\quad \begin{cases} x>-a \\ x\neq \dfrac{1}{2}+k,\ \ k\in\mathbb{Z} \\ x=-a+1,\ x=\dfrac{1}{4}+n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Из серии $x=\frac{1}{4}+n,\ \ n\in\mathbb{Z}$ при $n=0$ заданному отрезку $[0;1]$ принадлежит только один корень $x=\frac{1}{4}$.

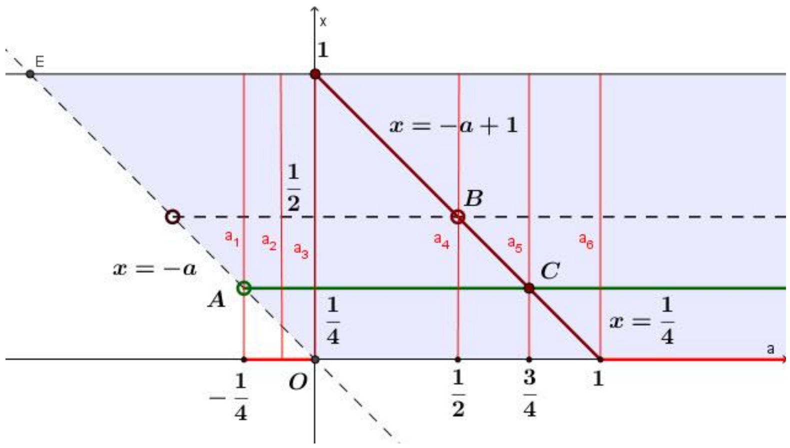
Учитывая, что $x\neq\frac{1}{2}+k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ при $k=0$ на заданном отрезке $[0;1]$ указываем, что $x\neq\frac{1}{2}$.

Получим $\begin{cases} x>-a \\ x\neq \dfrac{1}{2} \\ x=-a+1,\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $(**)$, при условии, что $0\le x\le 1$.

2) В системе координат $(a;x)$ определим графически, когда система (**) имеет единственное решение. На рисунке закрашенная область - это множество точек координатной плоскости, удовлетворяющее условиям $0\le x\le 1$и $x>-a$. В этой области изобразим прямые $x=-a+1$ и $x=\frac{1}{4}$, а так же $x\neq\frac{1}{2}$.

Перпендикулярно оси a проведем прямую $a=const$. При $-\frac{1}{4}<a<0$ прямая $a=const$ пересекает только прямую $x=\frac{1}{4}$, значит и система (**) имеет единственное решение. При $0\le a<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}<a<\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4}<a\le 1$ прямая $a=const$ пересекает прямые $x=\frac{1}{4}$ и $x=-a+1$ в двух точках. При $a=\frac{1}{2}$ она имеет общую точку только с прямой $x=\frac{1}{4}$. При $a=\frac{3}{4}$ все прямые пересекаются в точке С. При $a>1$ прямая $a=const$ пересекает только прямую $x=\frac{1}{4}$.

Тогда исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$ при $-\frac{1}{4}<a<0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{3}{4}$ и $a>1$.



Ответ: $-\frac{1}{4}<a<0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{3}{4}$ и $a>1$.

▪ *Тест* Комбинированные уравнения с параметром

1. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $6\log_4 \sin x + a\log_4 \sin x - a^2 + 7a - 10 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

---

2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{7x - x^2 - 6}\left((8a-15)\sin\frac{\pi x}{6} - 6\cos\frac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9\right) = 0$ имеет ровно пять решений.

---

3. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2\sin x + a| = a - 2\cos x - \sin x$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

---

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x^3 - 3x^2 - 9x + 3 - 0,5a)\cdot(2\sin x\cdot\cos x + 2\cos^2 x - 4\sin^2 x - 1 - a) = 0$ имеет ровно три различных решения.

---

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}\cdot\sin x = -\sqrt{x-a}\cdot\cos x$ имеет единственное решение на отрезке $[0;\pi]$.

---

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $tg(\pi x)\cdot\ln(2x+a) = \ln(2x+a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.

▪ *Ответы (тест)* Комбинированные уравнения с параметром

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$(-\infty;-6)\cup[2;5]$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{4};1\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$	$(-48;-\sqrt{10}-2)$ $\cup(\sqrt{10}-2;16)$	$a<0$ $\frac{3\pi}{4}\le a\le\pi$	$-1\le a\le-\frac{1}{2}$ $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a>1$

▪ *Решение (тест)* Комбинированные уравнения с параметром

1. **Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение** $6\log_4 \sin x + a\log_4 \sin x - a^2 + 7a - 10 = 0$ **имеет хотя бы одно решение.**

Решение:

$$(\log_4 \sin x)(a+6) = a^2 - 7a + 10$$

Если $a = -6$, то уравнение примет вид $36 + 42 + 10 = 0$, решений нет. Следовательно, $a \neq -6$.
Разделим уравнение на $a + 6 \neq 0$, получим

$\log_4 \sin x = \dfrac{a^2 - 7a + 10}{a+6}$. Т.к. $D(\log) = R_+$, то $\sin x > 0$, но $0 < \sin x \le 1$, значит $\log_4 \sin x \le 0$.

Уравнение будет иметь решение, если

$\dfrac{a^2 - 7a + 10}{a+6} \le 0,\quad \dfrac{(a-5)(a-2)}{a+6} \le 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;-6) \cup [2;5]$. ***Ответ:*** $(-\infty;-6) \cup [2;5]$.

---

2. **При каких значениях параметра** a **уравнение** $\sqrt{7x - x^2 - 6}\left((8a-15)\sin\dfrac{\pi x}{6} - 6\cos\dfrac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9\right) = 0$ **имеет ровно пять решений.**

Решение:

ОДЗ: $7x - x^2 - 6 \ge 0 \Leftrightarrow x \in [1;6]$.

$$(8a-15)\sin\frac{\pi x}{6} - 6\cos\frac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9 = 0 \text{ или } \sqrt{7x - x^2 - 6} = 0$$

Уравнение $\sqrt{7x - x^2 - 6} = 0$ дает два корня $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Для выполнения условия, что уравнение должно иметь пять корней, необходимо чтобы уравнение $(8a-15)\sin\dfrac{\pi x}{6} - 6\cos\dfrac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9 = 0$ $(*)$ имело еще три корня, удовлетворяющие ОДЗ.

Решим уравнение $(8a-15)\sin\dfrac{\pi x}{6} - 6\cos\dfrac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9 = 0$.

Пусть $t = \dfrac{\pi x}{6}$, тогда т.к. $x \in [1;6]$, то $t \in \left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$ и уравнение примет вид

$$(8a-15)\sin t - 6\cos 2t - 4a^2 + a + 9 = 0$$

$$-6\left(1 - 2\sin^2 t\right) + (8a-15)\sin t - 4a^2 + a + 9 = 0$$

$$12\sin^2 t + (8a-15)\sin t - 4a^2 + a + 3 = 0$$

$$D = (8a-15)^2 - 4\cdot 12\cdot\left(-4a^2 + a + 3\right) = (16a-9)^2$$

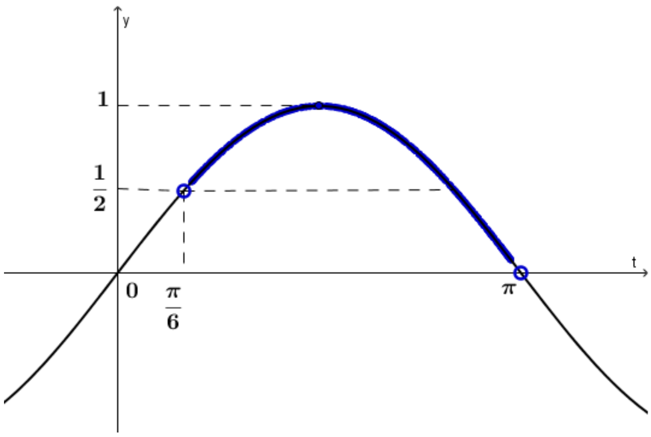
$$\sin t = \frac{-8a + 15 \pm (16a-9)}{24}$$

$$\sin t = \frac{4a+3}{12} \qquad \sin t = 1 - a$$

Т.к. $t \in \left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$, то $\sin t \in (0;1]$.

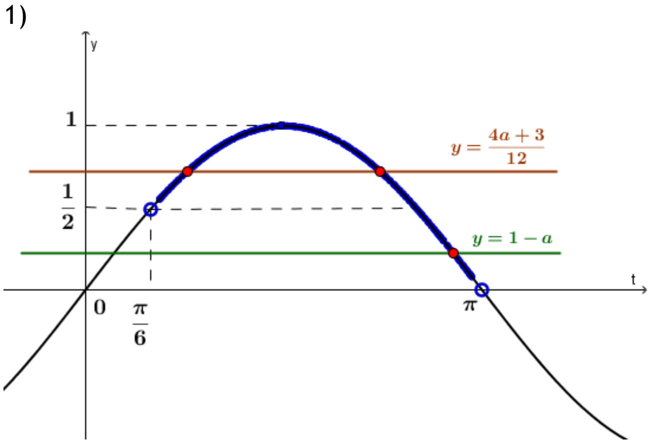
Исключим совпадение корней:

$$\frac{4a+3}{12}=1-a,\quad a=\frac{9}{16}$$



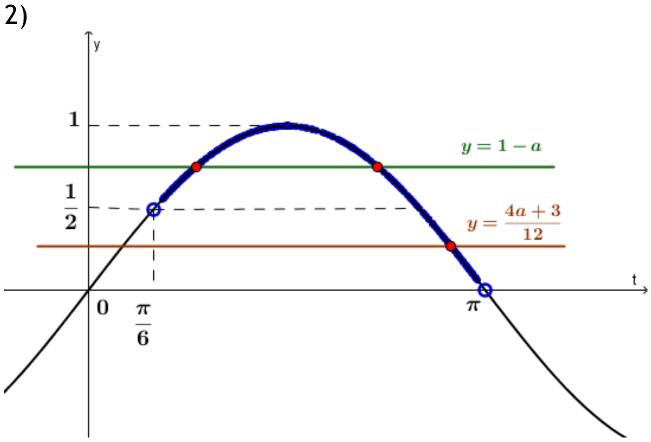
Рассмотрим случаи, когда уравнение $(*)$ может иметь три корня.

1)



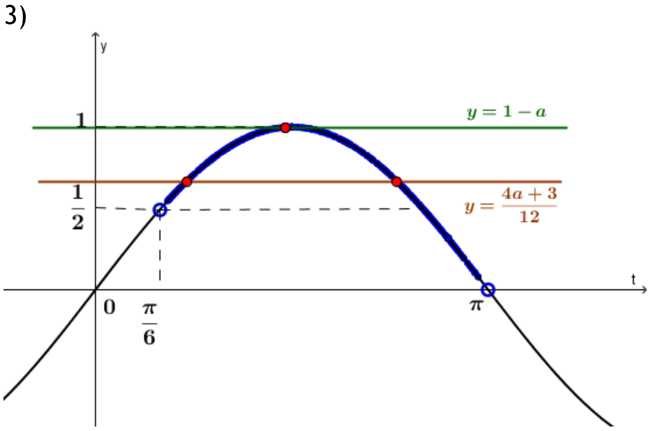
$$\begin{cases}\frac{1}{2}<\frac{4a+3}{12}<1\\ 0<1-a\le\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{4}<a<1$$

2)



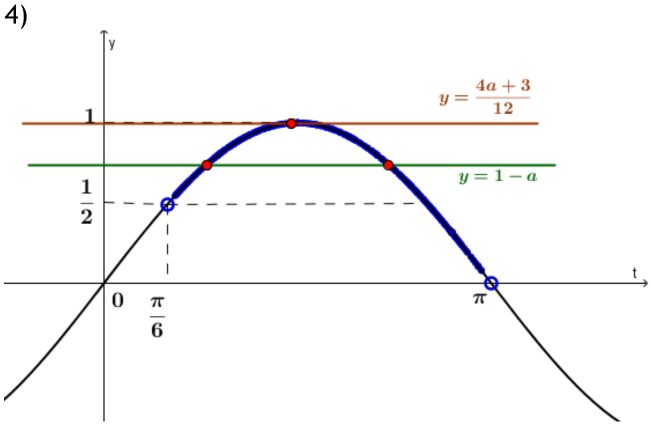
$$\begin{cases}0<\frac{4a+3}{12}\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}1-a<1\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<\frac{1}{2}$$

3)



$$\begin{cases}1-a=1\\ \frac{1}{2}<\frac{4a+3}{12}<1\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing$$

4)



$$\begin{cases}\frac{4a+3}{12}=1\\ \frac{1}{2}<1-a<1\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing$$

Итак, исходное уравнение имеет ровно пять решений при $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{4};1\right)$.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{4};1\right)$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$|\cos x+2\sin x+a|=a-2\cos x-\sin x$ **имеет хотя бы одно решение на промежутке** $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

Раскроем модуль.

$$\begin{cases} a-2\cos x-\sin x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x+2\sin x+a=a-2\cos x-\sin x \quad (1) \\ \cos x+2\sin x+a=-a+2\cos x+\sin x \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Уравнение (2) сводится к виду

$$\cos x-\sin x=2a\Big|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=a\sqrt{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x=a\sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=a\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-a\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-a$$

Уравнение (1) сводится к уравнению вида

$$3\cos x+3\sin x=0\Big|:3\cos x$$

$$tgx=-1$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

На промежутке $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ корней нет.

И т.к. $\pi<x\le\frac{3\pi}{2}$, то $\frac{3\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$ и $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}$.

Значит, уравнение имеет корень на промежутке $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$, если $-\frac{1}{2}\le -a<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<a\le\frac{1}{2}$.

Докажем, что при найденных значениях a неравенство $a-2\cos x-\sin x\ge 0$, $a\ge 2\cos x+\sin x$ выполняется.

Найдем множество значений выражения $2\cos x+\sin x$.

Для того, что бы свернуть выражение в тригонометрическое выражение, введем дополнительный угол.

Пусть $a=2,\ b=1$, тогда $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

$2\cos x+\sin x=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$, где $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$-\sqrt{5}\le\sqrt{5}\sin(x+\varphi)\le\sqrt{5}$.

Т.к. $\pi<x\le\frac{3\pi}{2}$, то $\pi+\varphi<x+\varphi\le\frac{3\pi}{2}+\varphi$

$$\sin(\pi+\varphi)<\sin(x+\varphi)\le\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)$$

$$-\sin\varphi<\sin(x+\varphi)\le-\cos\varphi$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}<\sin(x+\varphi)\le-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big|\cdot\sqrt{5}$$

$$-2<\sqrt{5}\sin(x+\varphi)\le-1$$

В неравенстве $a \ge 2\cos x + \sin x$ получим $a \ge \sqrt{5}\sin(x+\varphi)$.

$-\dfrac{1}{2} < a \le \dfrac{1}{2}$ и $-2 < \sqrt{5}\sin(x+\varphi) \le -1$. Наименьшее значение a при любых значениях всегда больше наибольшего значения выражения $\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$, а именно, $-\dfrac{1}{2} > -1$.

Значит, неравенство $a - 2\cos x - \sin x \ge 0$ выполняется при найденных значениях a.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

---

4. **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(x^3-3x^2-9x+3-0,5a\right)\cdot\left(2\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x-4\sin^2 x-1-a\right)=0$ имеет ровно три различных решения.**

Решение:
Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} x^3-3x^2-9x+3-0,5a=0 & (1) \\ 2\sin x\cdot\cos x+2\cos x^2-4\sin^2 x-1-a=0 & (2) \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение (2).

$$\sin 2x+\left(2\cos^2 x-1\right)-4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=a$$

$$\sin 2x+3\cos 2x=a+2 \quad \Big|\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x+\frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x=\frac{a+2}{\sqrt{10}}$$

$$\sin(2x+\varphi)=\frac{a+2}{\sqrt{10}}$$

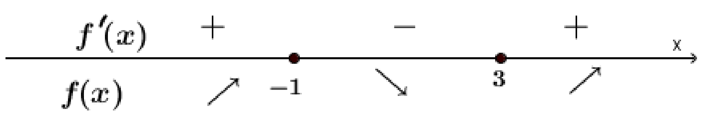
Полученное простейшее тригонометрическое уравнение если имеет решения, то их бесконечное множество. Исходное уравнение будет иметь ровно три корня, если уравнение (2) корней не имеет, а уравнение (1) имеет только три корня.

Уравнение (2) корней не имеет, если $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a+2}{\sqrt{10}}>1 \\ \dfrac{a+2}{\sqrt{10}}<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>\sqrt{10}-2 \\ a<-\sqrt{10}-2 \end{array}\right.$.

Рассмотрим (1) уравнение.

$x^3-3x^2-9x+3-0,5a=0$. Введем функцию $f(x)=x^3-3x^2-9x+3-0,5a$. Уравнение $f(x)=0$ будет иметь три корня, если график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс три раза.

Исследуем функцию с помощью производной и построим схематически ее график.



$f'(x)=3x^2-6x-9,\ f'(x)=0,\quad x_1=-1,\ x_2=3$.

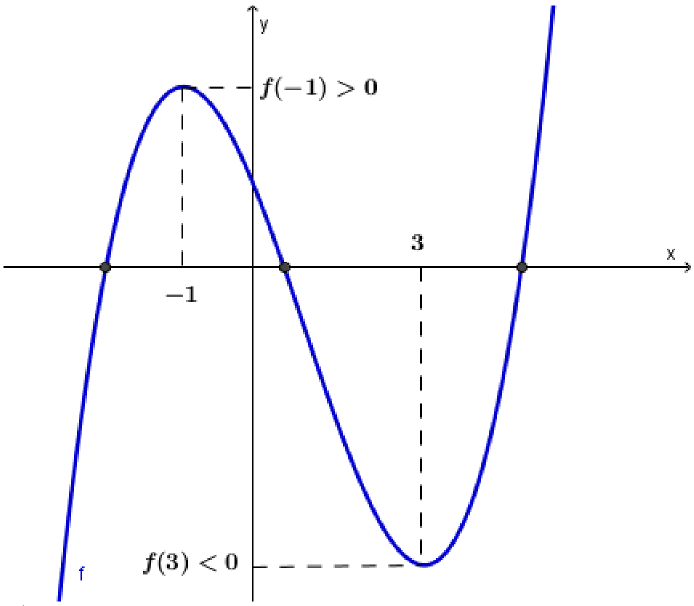


График функции пересекает ось абсцисс ровно три раза, если

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 0,5a > 0 \\ -24 - 0,5a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-48;16).$$

Исходное уравнение имеет ровно три решения при $a \in \left(-48;-\sqrt{10}-2\right) \cup \left(\sqrt{10}-2;16\right)$.

Ответ: $\left(-48;-\sqrt{10}-2\right) \cup \left(\sqrt{10}-2;16\right)$.

---

5. **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}\cdot\sin x = -\sqrt{x-a}\cdot\cos x$ имеет единственное решение на отрезке $[0;\pi]$.**

Решение:

1) Преобразуем уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x + \sqrt{x-a}\cdot\cos x = 0$$

$$\sqrt{x-a}\cdot(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-a} = 0 \\ \sin x + \cos x = 0; \end{array}\right. \\ x - a \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a \\ tgx = -1; \end{array}\right. \\ x \ge a \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ x \ge a \end{cases}$$

Из серии $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ при $k = 1$ отрезку $[0;\pi]$ принадлежит только один корень $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

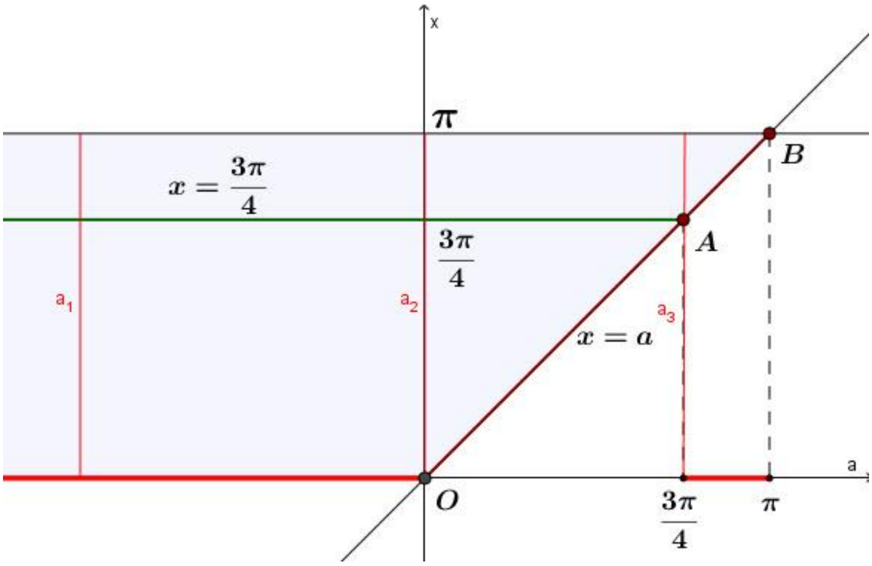
Получим $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right. \\ x \ge a \end{cases}$ $(*)$, при условии, что $0 \le x \le \pi$.

2) В системе координат $(a;x)$ определим графически, когда система (*) имеет единственное решение.
На рисунке закрашенная область - это множество точек координатной плоскости, удовлетворяющее условиям $0 \le x \le \pi$ и $x \ge a$. В этой области изобразим прямые $x = a$ и $x = \dfrac{3\pi}{4}$. Перпендикулярно оси a проведем прямую $a = const$. При $a < 0$ прямая $a = const$ пересекает прямую $x = \dfrac{3\pi}{4}$ один раз, значит и система (*)

имеет единственное решение. При $0 \le a < \frac{3\pi}{4}$ $a = const$ пересекает прямые $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = a$ в двух точках.

При $a = \frac{3\pi}{4}$ все прямые пересекаются в точке А. При $\frac{3\pi}{4} < a \le \pi$ прямая $a = const$ пересекает прямую $x = a$ один раз.

Тогда исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$ при $a < 0$ и $\frac{3\pi}{4} \le a \le \pi$.



Ответ: $a < 0$ и $\frac{3\pi}{4} \le a \le \pi$.

---

6. **Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $tg(\pi x)\cdot \ln(2x+a) = \ln(2x+a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.**

Решение:

1) Преобразуем уравнение $tg(\pi x)\cdot \ln(2x+a) = \ln(2x+a)$

$$\ln(2x+a)(tg(\pi x)-1) = 0$$

$$\begin{cases} 2x+a>0 \\ \cos(\pi x)\ne 0 \\ \ln(2x+a)=0,\ tg(\pi x)-1=0 \end{cases};\quad \begin{cases} 2x>-a \\ \pi x \ne \frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z} \\ 2x+a=1,\ \pi x = \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases};\quad \begin{cases} x>\frac{-a}{2} \\ x\ne \frac{1}{2}+k,\ \ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{-a+1}{2},\ x=\frac{1}{4}+n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Из серии $x = \frac{1}{4}+n,\ \ n\in\mathbb{Z}$ при $n=0$ заданному отрезку $[0;1]$ принадлежит только один корень $x=\frac{1}{4}$.

Учитывая, что $x \ne \frac{1}{2}+k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ при $k=0$ на заданном отрезке $[0;1]$ указываем, что $x\ne\frac{1}{2}$.

Получим $\begin{cases} x>\frac{-a}{2} \\ x\ne\frac{1}{2} \\ x=\frac{-a+1}{2},\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$ $(**)$, при условии, что $0\le x\le 1$.

2) В системе координат $(a;x)$ определим графически, когда система (**) имеет единственное решение.
На рисунке закрашенная область - это множество точек координатной плоскости, удовлетворяющее условиям $0 \le x \le 1$ и $x > \frac{-a}{2}$. В этой области изобразим прямые $x = \frac{-a+1}{2}$ и $x = \frac{1}{4}$, а так же $x \ne \frac{1}{2}$.

Перпендикулярно оси a проведем прямую $a = const$. При $-1 \le a \le -\frac{1}{2}$ прямая $a = const$ имеет общую точку только с прямой $x = \frac{-a+1}{2}$, значит и система (**) имеет единственное решение. При $-\frac{1}{2} < a < 0$, $0 < a < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < a \le 1$ прямая $a = const$ пересекает прямые $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{-a+1}{2}$ в двух точках. При $a = 0$ она имеет общую точку только с прямой $x = \frac{1}{4}$. При $a = \frac{1}{2}$ все прямые пересекаются в точке D. При $a > 1$ прямая $a = const$ пересекает только прямую $x = \frac{1}{4}$.

Тогда исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$ при $-1 \le a \le -\frac{1}{2}$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$ и $a > 1$

Ответ: $-1 \le a \le -\frac{1}{2}$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$ и $a > 1$.