Количество корней целых уравнений с параметром

- ***Примеры***

№1. При каких значениях *a* уравнение $(a-2)x^2+(4-2a)x+3=0$ имеет единственное решение.

№2. При каких значениях *a* уравнение $(a-4,2)x^2-(a-3)x-1,25=0$ имеет единственное решение.

№3. При каких значениях *k*, уравнение $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$ имеет два совпадающих корня.

№4. При каких значениях *a* уравнение $ax^2+2\sqrt{3}x+2a+1=0$ имеет два различных корня?

№5. При каких значениях *m* уравнение $(m-2)x^2+(m+1)x+m+6=0$ не имеет действительных корней?

№1. **При каких значениях *a* уравнение $(a-2)x^2+(4-2a)x+3=0$ имеет единственное решение.**

Решение:

1) $a-2=0,\ \ a=2$

Уравнение примет вид

$0\cdot x^2+0\cdot x+3=0$

$3=0,$ неверное числовое равенство

$x\in\varnothing,$ нет решений

2) $a\neq 2,\ \ (a-2)x^2-2(a-2)x+3=0$

$D/4=(a-2)^2-12\cdot(a-2)=(a-2)(a-2-12)$

Квадратное уравнение имеет

два совпадающих корня, если $D=0.$

$(a-2)(a-14)=0$

$a=2$ или $a=14$

Но $a=2$ не подходит, из 1) действия

При $\underline{a=14}$ уравнение имеет единственное решение.

Ответ: 14.

№2. **При каких значениях *a* уравнение $(a-4,2)x^2-(a-3)x-1,25=0$ имеет единственное решение.**

Решение:

1) $a-4,2=0,\ \ a=4,2$

Уравнение примет вид линейного

$0\cdot x^2-(4,2-3)x-1,25=0$

$1,2x=1,25$

$x=\dfrac{25}{24},$ единственное решение

$\underline{a=4,2}$ подходит

2) $a\neq 4,2$ Квадратное уравнение

$D=(a-3)^2-4(a-4,2)(-1,25)=$

$=a^2-6a+9+5a-21=a^2-a-12$

Квадратное уравнение имеет два

совпадающих корня, если $D=0.$

$a^2-a-12=0$

$\underline{a_1=4}\quad \underline{a_2=-3}$

Ответ: -3; 4 и 4,2.

№3. **При каких значениях *k*, уравнение $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$ имеет два совпадающих корня.**

Решение:

1) $k-1=0,\ \ k=1$

Уравнение примет вид линейного

$5x+8=0$

И оно имеет единственное решение.

Двух совпадающих решений

у линейного уравнения быть не может.

2) $k\neq 1$ Имеем квадратное уравнение.

Два совпадающих решения при $D=0.$

$D=(k+4)^2-4(k-1)(k+7)=k^2+8k+16-$

$-4(k^2+6k-7)=-3k^2-16k+44$

$D=0,\ \ -3k^2-16k+44=0$

$3k^2+16k-44=0\qquad D/4=64+132=196$

$k=\dfrac{-8\pm 14}{3}\qquad \underline{k_1=-\dfrac{22}{3}}\qquad \underline{k_2=2}$

Ответ: $-\dfrac{22}{3};\ 2$

№4. **При каких значениях *a* уравнение $ax^2+2\sqrt{3}x+2a+1=0$ имеет два различных корня?**

Решение:

Чтобы уравнение $ax^2+2\sqrt{3}x+2a+1=0$ имело два различных корня, необходимо, чтобы оно было квадратным, т.е. $a \neq 0$ и $D>0$.

$$D/4=\left(\sqrt{3}\right)^2-a\left(2a+1\right)=3-2a^2-a$$

$$-2a^2-a+3>0$$

$$2a^2+a-3<0$$

$$\left(a+1{,}5\right)\left(a-1\right)<0$$

$$\begin{cases}-1{,}5<a<1\\ a\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \underline{a\in\left(-1{,}5;0\right)\cup\left(0;1\right)}$$

Ответ: $a\in\left(-1{,}5;0\right)\cup\left(0;1\right)$.

№5. **При каких значениях *m* уравнение $\left(m-2\right)x^2+\left(m+1\right)x+m+6=0$ не имеет действительных корней?**

Решение:

1) Если $m=2,$ то уравнение примет вид

$$0\cdot x^2+3x+9=0$$

$$3x=9$$

$$x=3-\text{есть корень}$$

Значит, $m=2$ не подходит

2) $m\neq 2$. Квадратное уравнение не имеет корней, если $D<0$.

$$D=\left(m+1\right)^2-4\cdot\left(m-2\right)\left(m+6\right)=$$

$$=m^2+2m+1-4\left(m^2+4m-12\right)=$$

$$=-3m^2-14m+49$$

$$D<0,\ \ -3m^2-14m+49<0$$

$$3m^2+14m-49>0$$

$$\left(m+7\right)\left(m-\frac{7}{3}\right)>0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-7\\ m>\dfrac{7}{3}\end{array}\right.\\ m\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow m\in\underline{\left(-\infty;-7\right)\cup\left(\frac{7}{3};\infty\right)}$$

Ответ: $m\in\left(-\infty;-7\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};\infty\right)$.

Вариант 1

№1. При каких значениях *a* уравнение $(a+1)x^2+(2a+2)x+3=0$ имеет единственное решение.

№2. При каких *a* уравнение $(a+1)x^2+ax-1=0$ имеет единственное решение.

№3. При каких значениях *a* уравнение $ax^2-2\sqrt{6}x+a+1=0$ имеет два различных корня?

№4. При каких значениях *a* уравнение $ax^2-4x+a+3=0$ не имеет корней?

№5. Найти число целых значений а, при которых уравнение $x^3-3x=a(x^3+x)$ имеет три различных корня?

Вариант 2

№1. При каких значениях *a* уравнение $(a-3)x^2-(9-3a)x+2,25=0$ имеет единственное решение.

№2. При каких а уравнение $(a+1,875)x^2+(1+a)x-2=0$ имеет единственное решение.

№3. При каких значениях *a* уравнение $ax^2+4\sqrt{2}x+3a+10=0$ имеет два различных корня?

№4. Найти целое значение а, при котором уравнение $(a-12)x^2+2(a-12)x+2=0$ не имеет действительных корней.

№5. При каком целом значении *a* уравнение $x^3-x=a(x^3+x)$ имеет три различных корня?

▪ *Ответы (тест)* Количество корней целых уравнений с параметром

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	*2*	*-2 и -1*	$(-3;0)\cup(0;2)$	$(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$	$(-3;1)$
Вар.2	*4*	*-8; -2; -1,875*	$(-4;0)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)$	$(12;14)$	$(-1;1)$

▪ *Решение (тест)* Количество корней целых уравнений с параметром

Вариант 1

№1. **При каких значениях *а* уравнение $(a+1)x^2+(2a+2)x+3=0$ имеет единственное решение.**

Решение:

1) $a+1=0,\quad a=-1$

Получим уравнение вида

$0\cdot x^2+0\cdot x+3=0$

$3=0,$ неверно

$x\in\varnothing,$ нет решений

2) $a\neq -1,$ уравнение квадратное

$D/4=(a+1)^2-3(a+1)=(a+1)(a+1-3)=$

$=(a+1)(a-2)$

$D=0,\quad (a-1)(a-2)=0$

$a=-1\quad a=2$

$a=-1$ не подходит из 1) действия

$\underline{a=2}$ уравнение имеет единственное решение

***Ответ:* 2.**

№2. **При каких *а* уравнение $(a+1)x^2+ax-1=0$ имеет единственное решение.**

Решение:

1) $a+1=0,\quad a=-1$

Уравнение примет вид линейного

$0\cdot x^2-x-1=0$

$x=-1$ (единственное решение)

Значит, $\underline{a=-1}$ подходит

2) $a\neq -1.$ Уравнение квадратное

$D=a^2-4\cdot(-1)\cdot(a+1)=a^2+4a+4=(a+2)^2$

Квадратное уравнение имеет единственное решение, если $D=0$

$(a+2)^2=0,$

$\underline{a=-2}$

Ответ: -2 и -1.

№3. **При каких значениях *a* уравнение $ax^2-2\sqrt{6}x+a+1=0$ имеет два различных корня?**

Решение:

Квадратное уравнение имеет два различных корня, если $\begin{cases} a\neq 0 \\ D>0 \end{cases}$.

$D/4=6-a(a+1)=-a^2-a+6$

$-a^2-a+6>0$

$a^2+a-6<0$

$(a-2)(a+3)<0$

$-3<a<2,$ но $a\neq 0$

$\underline{a\in(-3;0)\cup(0;2)}$

Ответ: $(-3;0)\cup(0;2)$.

№4. **При каких значениях *a* уравнение $ax^2-4x+a+3=0$ не имеет корней?**

Решение:

1) $a=0,$ уравнение примет вид

$-4x+3=0$

$x=\frac{3}{4}$ есть решение

Значит $a=0$ не подходит

2) $\begin{cases} a\neq 0 \\ D<0 \end{cases}$

$D/4=4-a(a+3)=-a^2-3a+4$

$-a^2-3a+4<0$

$(a-1)(a+4)>0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-4 \\ a>1 \end{array}\right. \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\underline{(-\infty;-4)\cup(1;\infty)}$

Ответ: $(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$.

№5. **Найти число целых значений а, при которых уравнение $x^3-3x=a(x^3+x)$ имеет три различных корня?**

Решение:

$x^3-3x=ax^3+ax$

$x^3-ax^3-3x-ax=0$

$x(x^2-ax^2-3-a)=0$

$x^2(1-a)-3-a=0$

$x_1=0$ или $x^2(1-a)=3+a$

$x^2=\frac{a+3}{1-a}$

$x=0$ – первый корень

Исходное уравнение будет иметь еще два корня, если уравнение

$x^2=\frac{a+3}{1-a}$ имеет два корня.

Значит, $\frac{a+3}{1-a}>0$

$\frac{a+3}{a-1}<0$

$\underline{-3<a<1}$

Ответ: $(-3;1)$.

Вариант 2

№1. **При каких значениях *a* уравнение $(a-3)x^2-(9-3a)x+2,25=0$ имеет единственное решение.**

Решение:

1) $a-3=0, a=3$

Уравнение примет вид

$0\cdot x^2-0\cdot x+2,25=0$

$2,25=0,$ неверно

$x\in\varnothing,$ нет решений

Значит, $a=3$ не подходит

2) $a\neq 3,$ квадратное уравнение

$D=(9-3a)^2-4\cdot(a-3)\cdot 2,25=$

$=9(a-3)^2-9(a-3)=9(a-3)(a-3-1)=$

$=9(a-3)(a-4)$

Квадратное уравнение имеет два совпадающих корня, если $D=0$

$(a-3)(a-4)=0$

$a=3 \quad a=4$

$a=3$ не подходит из 1) действия

$\underline{a=4}$ уравнение имеет единственное решение

Ответ: 4.

№2. **При каких а уравнение $(a+1,875)x^2+(1+a)x-2=0$ имеет единственное решение.**

Решение:

1) $a=-1,875$ Уравнение примет вид

$0\cdot x^2-0,875x-2=0$

$x=\dfrac{-2}{0,875}$ единственное решение

Значит, $\underline{a=-1,875}$ подходит.

2) $a\neq -1,875$ Уравнение квадратное

Два совпадающих корня при $D=0$

$D=(1+a)^2-4\cdot(-2)\cdot(a+1,875)=$

$=1+2a+a^2+8a+15=a^2+10a+16$

$D=0,\ a^2+10a+16=0$

$\underline{a_1=-2} \quad \underline{a_2=-8}$

Ответ: -8; -2 и -1,875.

№3. **При каких значениях *a* уравнение $ax^2+4\sqrt{2}x+3a+10=0$ имеет два различных корня?**

Решение:

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ D>0 \end{cases} \qquad D/4=(2\sqrt{2})^2-a\cdot(3a+10)=8-3a^2-10a$$

$$-3a^2-10a+8>0$$

$$3a^2+10a-8<0$$

$$\begin{cases} -4<a<\dfrac{2}{3} \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{a\in(-4;0)\cup\left(0;\dfrac{2}{3}\right)}$$

Ответ: $(-4;0)\cup\left(0;\dfrac{2}{3}\right).$

№4. **Найти целое значение а, при котором уравнение $(a-12)x^2+2(a-12)x+2=0$ не имеет действительных корней.**

Решение:

1) $a-12=0, a=12$

Уравнение примет вид

$0\cdot x^2+0\cdot x+2=0$

$2=0,$ неверно

$x\in\varnothing,$ нет корней

Значит, $\underline{a=12}$ подходит

2) $\begin{cases} a\neq 12 \\ D<0 \end{cases}$

$D/4=(a-12)^2-(a-12)\cdot 2=$

$=(a-12)(a-12-2)=$

$=(a-12)(a-14)$

$D<0,\ (a-12)(a-14)<0$

$\underline{12<a<14}$

Ответ: $(12;14)$.

№5. **При каком целом значении *а* уравнение $x^3-x=a(x^3+x)$ имеет три различных корня?**

Решение:

$x^3-x=ax^3+ax$

$x^3-x-ax^3-ax=0$

$x(x^2-1-ax^2-a)=0$

$x^2(1-a)-1-a=0$

$x=0$ или $x^2(1-a)=1+a$

$x^2=\dfrac{a+1}{1-a}$

Исходное уравнение уже имеет один корень $x=0,$ еще два корня появляется, когда уравнение $x^2=\dfrac{a+1}{1-a}$ будет иметь два решения.

$\dfrac{a+1}{1-a}>0$

$\dfrac{a+1}{a-1}<0$

$\underline{-1<a<1}$

Ответ: $(-1;1)$.

✓ *Уравнение вида* $ax^2+bx+c=0$ *, где* $a,\ b,\ c-$ *некоторые числа* $(a\neq 0)$*,* *называется* ***квадратным уравнением****.*

✓ *Способы решения квадратного уравнения.*

Для любых коэффициентов	Для четного коэффициента перед x	Формулы Виета	Неполное квадратное уравнение: $c=0$	Неполное квадратное уравнение: $b=0$
Дискриминант: $D=b^2-4ac$ Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ Если $D=0$, то уравнение имеет два совпадающих решения: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. Если $D<0$, то уравнение не имеет корней $x\in\varnothing$.	Дискриминант: $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac$ Формула корней: $x_{1,\,2}=\dfrac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$	$D>0$ и $x_1,\ x_2-$ корни уравнения $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ Если $a=1$, то уравнение называется приведенным, тогда $x_1+x_2=-b$ $x_1\cdot x_2=c$	$ax^2+bx=0$ $x(ax+b)=0$ $x_1=0$ $x_2=-\dfrac{b}{a}$	$ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=-\dfrac{c}{a}$ Если $-\dfrac{c}{a}>0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ Если $-\dfrac{c}{a}=0$, уравнение имеет один корень $x=0$; Если $-\dfrac{c}{a}<0$, то уравнение не имеет корней $x\in\varnothing$