Тема: Тригонометрические уравнения

Профиль

Формулы понижения степени, двойного угла

- ***Примеры***

№1. а) Решите уравнение $\sin x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x=\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№2. Решите уравнение $4\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+6\sin x+1=\cos 2x$.

№3. а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№4. Решите уравнение $\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

№5. Решите уравнение $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\sin 2x$.

№6. Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin 2x=0$.

№7. а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

№8. а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№9. а) Решите уравнение $\sin 2x+2\cos^2 x+\cos 2x=0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

№10. а) Решите уравнение $2\sin 2y-2\cos 2y\cdot\cos y=\cos y$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие множеству значений функции $f(x)=\pi-2\arccos x$.

№11. а) Решите уравнение $\cos 3x\sin 3x=\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(12x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$.

▪ ***Решение (примеры)*** Формулы понижения степени, двойного угла

№1.

а) Решите уравнение $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x - \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{3}} - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$2\sqrt{3}\sin x - 4\sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$$

$$2\sin x\left(\sqrt{3} - 2\cos x\right) + \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 2\cos x\right) = 0$$

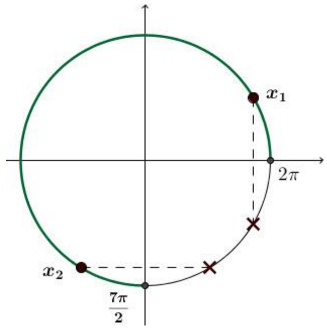
$$\left(\sqrt{3} - 2\cos x\right)\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$, $x_2 = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

Ответ:

а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{10\pi}{3}$.

№2.

Решите уравнение $4\cos^3\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 6\sin x + 1 = \cos 2x$.

Решение:

$$4\cos^3\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 6\sin x + 1 = \cos 2x$$

$$-4\sin^3 x + 6\sin x + 1 - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 0$$

$$-4\sin^3 x + 6\sin x + 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin^3 x - \sin^2 x - 3\sin x = 0$$

$$\sin x\left(2\sin^2 x - \sin x - 3\right) = 0$$

$2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$ $\qquad$ $\sin x = 0$

$\sin x = -1$ $\qquad$ $\sin x = \frac{3}{2}, \varnothing$ $\qquad$ $x = \pi k$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Ответ: πk , $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

№3.

а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение:

а)

$$\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\cos 2x$$

$$-\cos x=\cos 2x$$

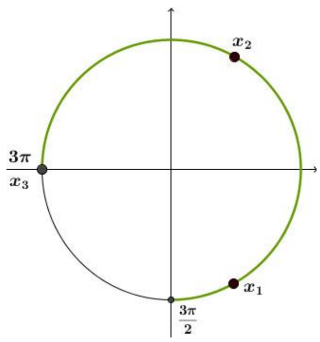
$$2\cos^2 x-1+\cos x=0$$

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$\cos x=-1 \qquad \cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=\pi+2\pi n \qquad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.



$$x_1=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3},\quad x_2=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3},\quad x_3=3\pi$$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$; *б)* $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, 3π.

№4. **Решите уравнение** $\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

$$\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\sin^2\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}\right)=\sin x$$

$$-\cos\frac{x}{2}=\sin x, \qquad \sin x+\cos\frac{x}{2}=0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}+1\right)=0$$

$$\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \qquad\qquad \cos\frac{x}{2}=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \frac{x}{2}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right. \qquad\qquad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+4\pi n\\ x=-\frac{5\pi}{3}+4\pi n\end{array}\right. \qquad\qquad x=\pi+2\pi k$$

Ответ: $\pi+2\pi k$, $-\frac{\pi}{3}+4\pi n$, $-\frac{5\pi}{3}+4\pi n$.

№5. **Решите уравнение** $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\sin 2x$.

Решение:

$$1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\sin 2x$$

$$\cos 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\sin 2x=0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$$

$$-\sin x-\sin 2x=0$$

$$2\sin x\cdot\cos x+\sin x=0$$

$$\sin x(2\cos x+1)=0$$

$$\sin x=0 \qquad \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$x=\pi k \qquad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, πk.

№6. **Решите уравнение** $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin 2x=0$.

Решение:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin 2x=0$$

$$\sin 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin 2x=0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin 2x=0$$

$$\cos x-2\sin x\cdot\cos x=0$$

$$\cos x(1-2\sin x)=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2} \qquad \cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$.

№7. **а) Решите уравнение** $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение:
а)

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$\frac{1+\cos 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}=\frac{1+\cos 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$$

$$\sin 2x=-\sin 2x$$

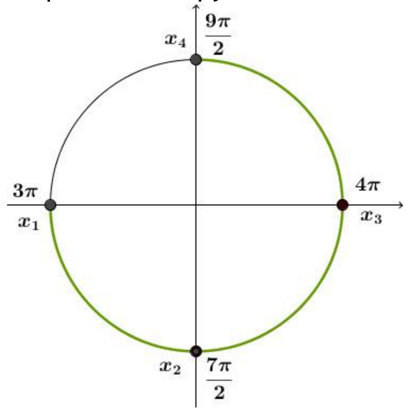
$$2\sin 2x=0$$

$$\sin 2x=0$$

$$2x=\pi k$$

$$x=\frac{\pi k}{2}$$

б) Отбор корней проведем по тригонометрической окружности.



$$x_1=3\pi,\quad x_2=\frac{7\pi}{2},\quad x_3=4\pi,\quad x_4=\frac{9\pi}{2}$$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{2}$; *б)* $3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ 4\pi,\ \frac{9\pi}{2}$.

№8. **а) Решите уравнение** $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение:
а)

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$$

$$\frac{1+\cos 2\cdot\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)}{2}=\frac{1+\cos 2\cdot\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2x\right)$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}\cos 2x+\sin\frac{5\pi}{3}\sin 2x=\cos\frac{5\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{5\pi}{3}\sin 2x$$

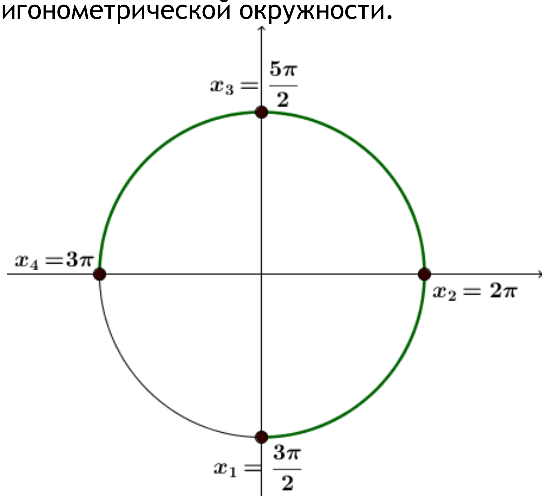
$$2\sin\frac{5\pi}{3}\sin 2x=0$$

$$\sin 2x=0$$

$$2x=\pi k$$

$$x=\frac{\pi k}{2}$$

б) Отбор корней проведем по тригонометрической окружности.



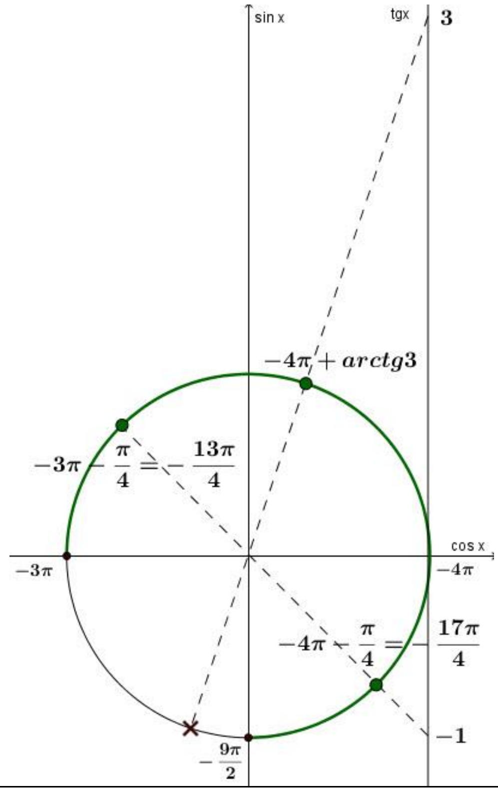
Ответ: а) $\frac{\pi k}{2}$; *б)* $\frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi$.

№9. **а) Решите уравнение** $\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Решение:

а) $$\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$$
$$2\sin x\cos x + 2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$
$$3\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 0 \quad \Big| : \cos^2 x$$
$$3 + 2tgx - tg^2 x = 0$$
$$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0$$
$$tgx = -1 \qquad tgx = 3$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \qquad x = arctg3 + \pi n$$



б) Отбор корней проведем по тригонометрической окружности.

$$x_1 = -4\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{17\pi}{4}, \quad x_2 = -4\pi + arctg3$$
$$x_3 = -3\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{13\pi}{4}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \ \ arctg3 + \pi n, \ \ n, k \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{17\pi}{4}, -4\pi + arctg3, -\frac{13\pi}{4}$.

№10. **а) Решите уравнение** $2\sin 2y - 2\cos 2y \cdot \cos y = \cos y$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие множеству значений функции $f(x) = \pi - 2\arccos x$.

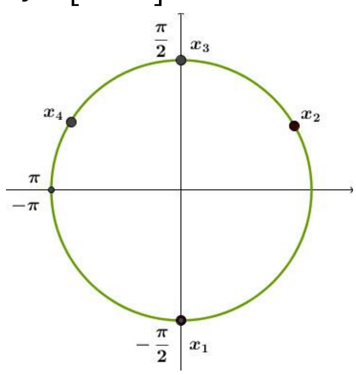
Решение: а)
$$2\sin 2y - 2\cos 2y \cdot \cos y = \cos y$$
$$4\sin y \cdot \cos y - 2\cos 2y \cdot \cos y - \cos y = 0$$
$$\cos y\left(4\sin y - 2\cos 2y - 1\right) = 0$$
$$4\sin y - 2\cos 2y - 1 = 0 \qquad \cos y = 0$$
$$4\sin y - 2\left(1 - 2\sin^2 y\right) - 1 = 0 \qquad y = \frac{\pi}{2} + \pi k$$
$$4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0$$
$$\sin y = \frac{1}{2} \qquad \sin y = -\frac{3}{2}, \ \varnothing$$
$$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$
$$y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$;

б) $-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{6}, \ \frac{\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{6}$

б) Найдем множество значений функции $f(x) = \pi - 2\arccos x$.
$$0 \le \arccos x \le \pi$$
$$0 \le 2\arccos x \le 2\pi$$
$$-2\pi \le -2\arccos x \le 0$$
$$-\pi \le \pi - 2\arccos x \le \pi \qquad E(f) = [-\pi; \pi]$$

Отбор корней проведем по тригонометрической окружности. $y \in [-\pi; \pi]$



$$x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{5\pi}{6}$$

№11. **а) Решите уравнение** $\cos 3x \sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(12x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$.

Решение: а)

$$\cos 3x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 12x$$
$$2\cos 3x \sin 3x - \sin 12x = 0$$
$$\sin 6x - 2\sin 6x \cos 6x = 0$$
$$\sin 6x\left(1-2\cos 6x\right) = 0$$
$$\sin 6x = 0 \qquad \cos 6x = \frac{1}{2}$$
$$6x = \pi k \qquad 6x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$$
$$x = \frac{\pi k}{6} \qquad x = \pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$$

б)

1) $x = \frac{\pi k}{6}$

$-\frac{3\pi}{4} \le \frac{\pi k}{6} \le -\frac{\pi}{4} \quad \Big| \cdot\frac{6}{\pi};$

$-4,5 \le k \le -1,5$

$k \in \mathbb{Z},\ \ k=-4 \ \ x_1 = -\frac{2\pi}{3}$

$k=-3 \ \ x_2 = -\frac{\pi}{2}$

$k=-2 \ \ x_2 = -\frac{\pi}{3}$

2) $x = -\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$

$-\frac{3\pi}{4} \le -\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3} \le -\frac{\pi}{4} \quad \Big| \cdot\frac{36}{\pi}$

$-27 \le -2+12k \le -9$

$-25 \le 12k \le -7; \quad -2\frac{1}{12} \le k \le -\frac{7}{12}$

$k \in \mathbb{Z} \ \ k=-2 \ \ x_1 = -\frac{13\pi}{18}$

$k=-1 \ \ x_2 = -\frac{7\pi}{18}$

3) $x = \frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$

$-\frac{3\pi}{4} \le \frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3} \le -\frac{\pi}{4}$

$-2\frac{5}{12} \le k \le -\frac{11}{12}$

$k \in \mathbb{Z} \ \ k=-2 \ \ x_1 = -\frac{11\pi}{18}$

$k=-1 \ \ x_2 = -\frac{5\pi}{18}$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{6};\ \ \pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3} \quad k\in\mathbb{Z};$

б)

$-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{13\pi}{18},\ -\frac{11\pi}{18},\ -\frac{7\pi}{18},\ -\frac{5\pi}{18}.$

▪ ***Тест*** Формулы понижения степени, двойного угла

№1. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sin x = \cos x + \frac{1}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№2. Решите уравнение $4\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos 2x + 2\cos(\pi + x) = 1$.

№3. а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos 2x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}375 \cdot \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; \pi]$.

№6. а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№7. а) Решите уравнение $2\sin y \cdot \cos 2y - 3\sin 2y = 2\sin y$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие множеству значений функции $f(x) = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$.

№8. а) Решите уравнение $\cos 2x \sin 2x \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(8x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right]$.

▪ Ответы (тест) Формулы понижения степени, двойного угла

№1	*а)* $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; *б)* $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}$.
№2	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ 2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi k$
№3	*а)* $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ 2\pi n$; *б)* $-\frac{4\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3},\ 0$.
№4	*а)* $\frac{\pi k}{2}$; *б)* $\frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ 4\pi$
№5	*а)* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $-\frac{7\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}$.
№6	*а)* $\frac{\pi k}{2}$; *б)* $-\frac{5\pi}{2},-2\pi,-\frac{3\pi}{2},-\pi$.
№7	*а)* $\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $-\pi,\ -\frac{2\pi}{3},\ 0$.
№8	*а)* $\frac{\pi k}{4},\ \pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\quad k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{65\pi}{24},\ \frac{11\pi}{4},\ \frac{67\pi}{24},\ 3\pi,\ \frac{77\pi}{24},\ \frac{13\pi}{4},\ \frac{79\pi}{24}$

▪ Решение (тест) Формулы понижения степени, двойного угла

№1.

а) Решите уравнение $\sin 2x+\sin x=\cos x+\frac{1}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение:

а)

$$\sin 2x+\sin x=\cos x+\frac{1}{2}$$

$$2\sin x\cdot\cos x+\sin x-\cos x-\frac{1}{2}=0$$

$$4\sin x\cdot\cos x+2\sin x-2\cos x-1=0$$

$$2\sin x(2\cos x+1)-(2\cos x+1)=0$$

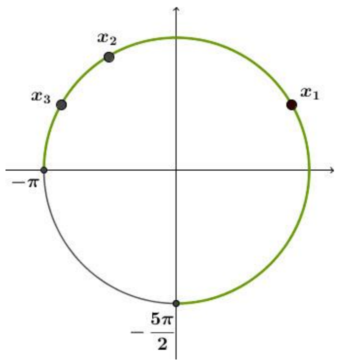
$$(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}\qquad\qquad \sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\qquad\qquad x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



$$x_1=-2\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{11\pi}{6},\ x_2=-\frac{4\pi}{3},\ x_3=-\frac{7\pi}{6}$$

Ответ:

а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$;

б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}$.

№2. **Решите уравнение** $4\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos 2x+2\cos(\pi+x)=1$.

Решение:

$$4\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos 2x+2\cos(\pi+x)=1$$

$$4\cos^3 x-\cos 2x-2\cos x-1=0$$

$$4\cos^3 x-\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos x-1=0$$

$$2\cos^3 x-\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\cos x\left(2\cos^2 x-\cos x-1\right)=0$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0 \qquad \cos x=0$$

$$\cos x=1 \qquad \cos x=-\frac{1}{2} \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=2\pi n \qquad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

№3. **а) Решите уравнение** $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Решение:

а)

$$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos 2x$$

$$\cos x=\cos 2x$$

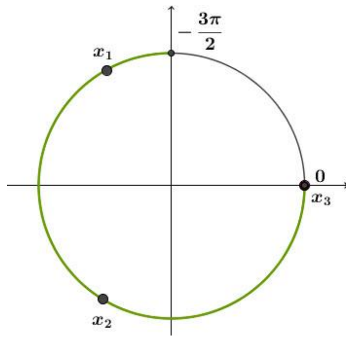
$$2\cos^2 x-1-\cos x=0$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$\cos x=1 \qquad \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$x=2\pi n \qquad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.



$$x_1=-\frac{4\pi}{3},\ x_2=-\frac{2\pi}{3},\ x_3=0$$

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $2\pi n$; *б)* $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0.

№4. **а) Решите уравнение** $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение:

а)

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$\frac{1-\cos 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}=\frac{1-\cos 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$$

$$\sin 2x=-\sin 2x$$

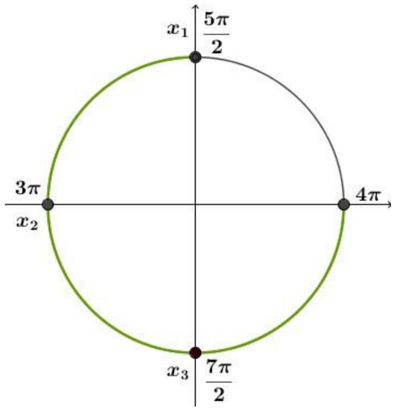
$$2\sin 2x=0$$

$$\sin 2x=0$$

$$2x=\pi k$$

$$x=\frac{\pi k}{2}$$

б) Отбор корней проведем по тригонометрической окружности.



$$x_1=\frac{5\pi}{2},\ x_2=3\pi,\ x_3=\frac{7\pi}{2},\ x_4=4\pi$$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{2}$; *б)* $\frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ 4\pi$.

№5. **а) Решите уравнение** $\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0,375\cdot\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\pi]$.

Решение:

а)

$$\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0,375\cdot\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1-\cos 2\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\left(1-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3}{4}$$

$$\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

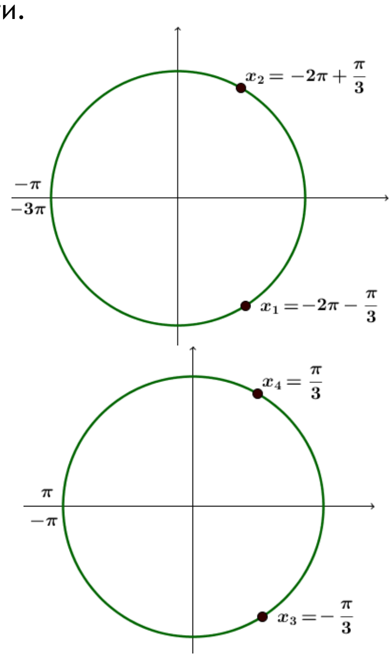
$$1-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{1+\cos x}{2}=\frac{3}{4},$$

$$\cos x=\frac{1}{2}\qquad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

б) Отбор корней проведем по тригонометрической окружности.



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $-\frac{7\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}$.

№6. **а) Решите уравнение** $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение:

а)

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$$

$$\frac{1+\cos 2\cdot\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{2}=\frac{1+\cos 2\cdot\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)}{2}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)$$

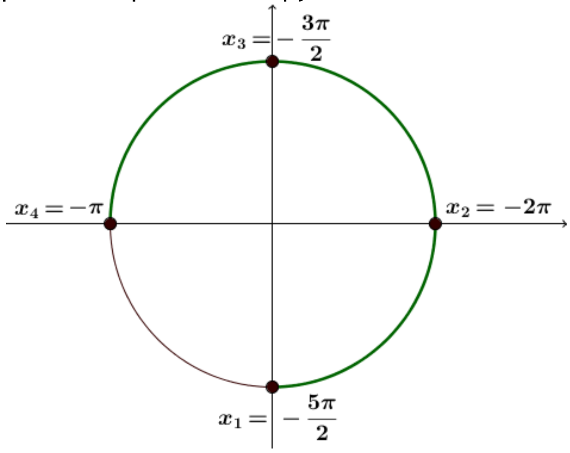
$$\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2x+\sin\frac{4\pi}{3}\sin 2x=\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{4\pi}{3}\sin 2x$$

$$2\sin\frac{4\pi}{3}\sin 2x=0$$

$$\sin 2x=0$$

$$2x=\pi k,\quad x=\frac{\pi k}{2}$$

б) Отбор корней проведем по тригонометрической окружности.



Ответ: а) $\frac{\pi k}{2}$; *б)* $-\frac{5\pi}{2},-2\pi,-\frac{3\pi}{2},-\pi$.

№7. **а) Решите уравнение** $2\sin y\cdot\cos 2y-3\sin 2y=2\sin y$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие множеству значений функции $f(x)=\arcsin x-\frac{\pi}{2}$.

Решение:

а)

$$2\sin y\cdot\cos 2y-3\sin 2y=2\sin y$$

$$2\sin y\cdot\cos 2y-6\sin y\cdot\cos y-2\sin y=0$$

$$2\sin y\left(\cos 2y-3\cos y-1\right)=0$$

$\cos 2y-3\cos y-1=0$ $\qquad$ $\sin y=0$

$2\cos^2 y-1-3\cos y-1=0$ $\qquad$ $y=\pi k$

$$2\cos^2 y-3\cos y-2=0$$

$\cos y=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos y=2,\ \varnothing$

$$y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$$

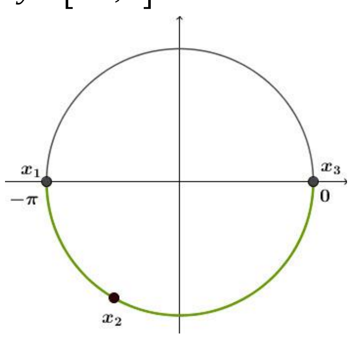
б) Найдем множество значений функции

$$f(x)=\arcsin x-\frac{\pi}{2}.$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$$

$$-\pi\le\arcsin x-\frac{\pi}{2}\le 0,\quad E(f)=[-\pi;0]$$

Отбор корней проведем по тригонометрической окружности. $y\in[-\pi;0]$



$$x_1=-\pi,\quad x_2=-\frac{2\pi}{3},\quad x_3=0$$

Ответ: а) $\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $-\pi,\ -\frac{2\pi}{3},\ 0$.

№8. **а) Решите уравнение** $\cos 2x \sin 2x \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(8x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right]$.

Решение: а)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \sin 2x = -\frac{1}{4}\sin 8x$$

$$2\sqrt{3}\cos 2x \sin 2x + \sin 8x = 0$$

$$\sqrt{3}\sin 4x + 2\sin 4x \cos 4x = 0$$

$$\sin 4x\left(\sqrt{3} + 2\cos 4x\right) = 0$$

$$\sin 4x = 0 \qquad \cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4x = \pi k \qquad 4x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{4} \qquad x = \pm\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{4}$; $\pm\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$;

б)

$\frac{65\pi}{24}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{67\pi}{24}$, 3π, $\frac{77\pi}{24}$, $\frac{13\pi}{4}$, $\frac{79\pi}{24}$.

б)

1) $x = \frac{\pi k}{4}$

$$\frac{8\pi}{3} \le \frac{\pi k}{4} \le \frac{10\pi}{3} \quad \Big| \cdot \frac{4}{\pi};$$

$$10\frac{2}{3} \le k \le 13\frac{1}{3}$$

$k \in \mathbb{Z}$, $k = 11$ $x_1 = \frac{11\pi}{4}$

$k = 12$ $x_2 = 3\pi$

$k = 13$ $x_2 = \frac{13\pi}{4}$

2) $x = -\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$

$$\frac{8\pi}{3} \le -\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \le \frac{10\pi}{3} \quad \Big| \cdot \frac{24}{\pi}$$

$$64 \le -5 + 12k \le 80$$

$$69 \le 12k \le 85; \quad 5\frac{9}{12} \le k \le 7\frac{1}{12}$$

$k \in \mathbb{Z}$ $k = 6$ $x_1 = \frac{67\pi}{24}$

$k = 7$ $x_2 = \frac{79\pi}{24}$

3) $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$

$$\frac{8\pi}{3} \le \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \le \frac{10\pi}{3}$$

$$4\frac{11}{12} \le k \le 6\frac{3}{12}$$

$k \in \mathbb{Z}$ $k = 5$ $x_1 = \frac{65\pi}{24}$

$k = 6$ $x_2 = \frac{77\pi}{24}$