## Дробно-рациональные уравнения с параметром

- ***Примеры***

№1. При каком значении *a* уравнение $\frac{x^2-3x+2}{x-a}=0$ имеет один корень?

---

№2. При каком значении *a* уравнение $\frac{(a+2)x^2+(a+7)x+5}{x-1}=0$ имеет один корень?

---

№3. Найти значение параметра *a* для которых уравнение $\frac{x^2-3a}{x^2-25}=\frac{ax+5}{x^2-25}$ имеет единственное решение.

---

№4. При каком значении параметра *p* уравнение $\frac{5x-3}{x^2-11x+24}=\frac{p}{x-8}$ не имеет решений?

**№1.** **При каком значении *a* уравнение** $\dfrac{x^2-3x+2}{x-a}=0$ **имеет один корень?**

*Решение:*

$$\begin{cases} x-3x+2=0 \\ x\neq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ x\neq a \end{cases}$$

Единственное решение

1) Если $a=1$, то

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

2) Если $a=2$, то

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

***Ответ:*** $a=1$ и $a=2$.

---

**№2.** **При каком значении *a* уравнение** $\dfrac{(a+2)x^2+(a+7)x+5}{x-1}=0$ **имеет один корень?**

*Решение:*

1) $a=-2$, $\begin{cases} 5x+5=0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$ единственное решение

2) $a\neq -2$, $D=(a+7)^2-4(a+2)\cdot 5=a^2+14a+49-20a-40$

$$D=a^2-6a+9=(a-3)^2 \qquad x=\frac{-(a+7)\pm(a-3)}{2(a+2)}=\left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{a+2} \\ \dfrac{-2a-4}{2(a+2)}=-1 \end{array}\right.$$

$$D=0,\ a=3\Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=-1 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

$$D>0,\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{a+2} \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x\neq 1 \end{cases}$$

Единственное решение будет, если $-\dfrac{5}{a+2}=1,\ -5=a+2;\ a=-7$

Итак, уравнение имеет единственное решение при $a=\{-7;-2;\ 3\}$

***Ответ: -7; -2; 3.***

**№3.** **Найти значение параметра *a* для которых уравнение** $\frac{x^2-3a}{x^2-25}=\frac{ax+5}{x^2-25}$ **имеет единственное решение.**

*Решение:*

$x^2-ax-3a-5=0$ ОДЗ: $x\neq 5,\ \ x\neq -5$

1) $D=a^2-4(-3a-5)=a^2+12a+20;\ \ a^2+12a+20=0;\ a_1=-10;\ \ a_2=-2$

*а*) $a=-10$, то $x^2+10x+25=0,\ \ x=-5\notin$ ОДЗ

*б*) $a=-2$, то $x^2+2x+1=0,\ \ x=-1\in$ ОДЗ

2) $D>0$, но один из корней $\in$ ОДЗ, а другой $\notin$ ОДЗ

$x=5,\ \ 25-5a-3a-5=0,\ \ a=2{,}5$

Проверка: $x^2-2{,}5x-7{,}5-5=0$

$x^2-2{,}5x-12{,}5=0$

$x_1=5\notin$ ОДЗ $\quad x_2=-2{,}5\in$ ОДЗ $\qquad \underline{a\in\{-2;\ 2{,}5\}}$

***Ответ -2 и 2,5.***

---

**№4.** **При каком значении параметра *p* уравнение** $\frac{5x-3}{x^2-11x+24}=\frac{p}{x-8}$ **не имеет решений?**

*Решение:*

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x-8)}-\frac{p}{x-8}=0$$

$$\frac{5x-3-p(x-3)}{(x-3)(x-8)}=0$$

$$\begin{cases}5x-3-px+3p=0\\ x\neq 3\\ x\neq 8\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(5-p)=3-3p \quad (1)\\ x\neq 3\\ x\neq 8\end{cases}$$

Исходное уравнение не имеет решений, если

а) Линейное уравнение $(1)$ из числителя не имеет решений, т.е. принимает вид $0\cdot x=b$, где $b\neq 0$

$$\begin{cases}5-p=0\\ 3-3p\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=5\\ p\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow p=5$$

б) Один из корней знаменателя совпадает с корнем числителя

Подставим $x=3$ в уравнение $(1)$, получим

$3(5-p)=3-3p$

$15-3p=3-3p$

$15=3$, неверно

Значит, нет таких значений $p$, при которых $x=3$.

Подставим $x=8$ в уравнение $(1)$, получим

$8(5-p)=3-3p$

$40-8p=3-3p$

$5p=37$

$\underline{p=7{,}4}$

***Ответ:5 и 7,4.***

## ▪ *Тест* Дробно-рациональные уравнения с параметром

№1. При каком значении *a* уравнение $\frac{x^2-4x+3}{x-a}=0$ имеет один корень?

№2. При каком значении *a* уравнение $\frac{(a-2)x^2+4x+1}{x+1}=0$ имеет один корень?

№3. При каких значениях *a* уравнение $\frac{x^2+(a-2)x+2,25}{x-3}=0$ имеет единственное решение?

№4. При каких значениях *a* уравнение $\frac{x-a}{x-2}-\frac{x}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$ не имеет решений?

№5. При каком наибольшем значении *p* уравнение $\frac{4x-1}{x^2-7x+6}=\frac{p}{x-6}$ не имеет решений?

## ▪ *Ответы (тест)* Дробно-рациональные уравнения с параметром

| №1 | №2 | №3 | №4 | №5 |
|---|---|---|---|---|
| *1 и 3* | *2; 5 и 6* | *-4,75; 0; 2 и 8* | *1,75 и 4* | *4 и 4,6* |

**№1.** **При каком значении *a* уравнение** $\dfrac{x^2-4x+3}{x-a}=0$ **имеет один корень?**

*Решение:*

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x-a}=0$$

$$\begin{cases}(x-1)(x-3)=0\\ x-a\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1,\ x=3\\ x\neq a\end{cases}$$

1) Если $\underline{a=1}$, то

$$\begin{cases}x=1,\ x=3\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (единственное решение)}$$

2) Если $\underline{a=3}$, то

$$\begin{cases}x=1,\ x=3\\ x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (единственное решение)}$$

***Ответ: 1 и 3.***

---

**№2.** **При каком значении *a* уравнение** $\dfrac{(a-2)x^2+4x+1}{x+1}=0$ **имеет один корень?**

*Решение:*

$$(a-2)x^2+4x+1=0\ (1) \qquad \text{ОДЗ: } x+1\neq 0,\ \ x\neq -1$$

$(1)$ а) Если $a=2$, то уравнение примет вид $4x+1=0$

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4} \text{ (единственное решение)}, \quad \underline{a=2}-\text{подходит}$$

б) $a\neq 2$, то уравнение $(1)$ квадратное. $D/4=4-(a-2)=-a+6$

$D=0$, квадратное уравнение имеет два совпадающих корня

$$-a+6=0,\ a=6$$

Если $a=6$, то уравнение $(1)$ примет вид

$$4x^2+4x+1=0,\ \ (2x+1)^2=0$$

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ (единственное решение)}, \quad \underline{a=6}-\text{подходит}$$

в) $D>0$, квадратное уравнение имеет два различных решения.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если один из корней числителя совпадает с корнем знаменателя.

Подставим $x=-1$ в числитель, и узнаем при каком значении $a$ его корень будет равен $(-1)$.

$$(a-2)\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+1=0,\ \ a=5$$

Уравнение $(1)$ при $a=5$ примет вид

$$(5-2)x^2+4x+1=0,\ \ 3x^2+4x+1=0$$

$$x=\frac{-2\pm 1}{3}=\left|\begin{array}{l}-1\notin \text{ОДЗ}\\ -\dfrac{1}{3}\in \text{ОДЗ, единственное решение}\end{array}\right., \quad \underline{a=5}-\text{подходит}$$

***Ответ: 2; 5 и 6.***

**№3.** **При каких значениях a уравнение** $\frac{x^2+(a-2)x+2,25}{x-3}=0$ **имеет единственное решение?**

*Решение:*

$$\begin{cases} ax^2+(a-4)x+0,5=0 \ (1) \\ x+2\neq 0 \end{cases}$$

$(1)$ а) $a=0$, уравнение $(1)$ примет вид $-4x+0,5=0$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{8} \ (\text{единственное решение}), \ \underline{a=0} \ -\text{подходит}$$

б) $a\neq 0$, уравнение $(1)$ квадратное

$$D=(a-4)^2-4\cdot a\cdot 0,5=a^2-8a+16-2a=a^2-10a+16$$

Квадратное уравнение имеет два совпадающих корня при $D=0$.

$$a^2-10a+16=0$$

$$a_1=2 \quad a_2=8$$

Если $a=2$, то уравнение $(1)$ примет вид

$$2x^2-2x+0,5=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0$$

$$(2x-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \ (\text{единственное решение}), \ \underline{a=2}-\text{подходит}$$

Если $a=8$, то уравнение $(1)$ примет вид

$$8x^2+4x+0,5=0 \Leftrightarrow 16x^2+8x+1=0$$

$$(4x+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{4} \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4} \ (\text{единственное решение}), \ \underline{a=8}-\text{подходит}$$

в) Если $D>0$, то квадратное уравнение $(1)$ имеет два различных корня.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если один из корней числителя совпадает с корнем знаменателя.

Подставим $x=-2$ в уравнение $(1)$ из числителя.

$$a\cdot(-2)^2+(a-4)\cdot(-2)+0,5=0$$

$$\underline{a=-4,75}$$

***Ответ:-4,75; 0; 2 и 8.***

**№4.**

**При каких значениях *a* уравнение $\frac{x-a}{x-2}-\frac{x}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$ не имеет решений?**

*Решение:*

$$\frac{(x-a)(x+2)-x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{cases} x^2+2x-ax-2a-x^2+2x=1 \\ x\neq 2 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-ax=2a+1 \\ x\neq 2 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(4-a)=2a+1 \ (1) \\ x\neq 2 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

Исходное уравнение не имеет решений, если

а) Уравнение $(1)$ не имеет решений, т.е. примет вид

$0\cdot x=b,$ где $b\neq 0$

$$\begin{cases} 4-a=0 \\ 2a+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a\neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{a=4}$$

б) Если один из корней знаменателя совпадают с корнем числителя. Подставим $x=2$ в уравнение $(1)$, получим

$2(4-a)=2a+1$

$8-2a=2a+1$

$4a=7$

$\underline{a=1{,}75}$

Подставим $x=-2$ в уравнение $(1)$, получим

$-2(4-a)=2a+1$

$-8+2a=2a+1$

$-8=1,$ неверно

Нет таких значений $a,$ при которых $x=-2.$

***Ответ:1,75 и 4.***

**№5.**

**При каком наибольшем значении *p* уравнение $\frac{4x-1}{x^2-7x+6}=\frac{p}{x-6}$ не имеет решений?**

*Решение:*

$$\frac{4x-1}{(x-6)(x-1)}=\frac{p}{x-6}$$

$$\frac{4x-1-p(x-1)}{(x-6)(x-1)}=0$$

$$\begin{cases} 4x-1-px+p=0 \\ x\neq 6 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(4-p)=1-p \quad (1) \\ x\neq 6 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

Исходное уравнение не имеет решений, если

а) Уравнение $(1)$ не имеет решений

$$\begin{cases} 4-p=0 \\ 1-p\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=4 \\ p\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{p=4}$$

б) Один из корней знаменателя совпадает с корнем числителя

Подставим $x=6$ в уравнение $(1)$

$$6(4-p)=1-p$$

$$24-6p=1-p$$

$$23=5p$$

$$\underline{p=4,6}$$

Подставим $x=1$ в уравнение $(1)$

$$1\cdot(4-p)=1-p$$

$$4-p=1-p$$

$$4=1, \text{ неверно.}$$

Значит нет таких значений $p$, при которых $x=1$

***Ответ:4 и 4,6.***

## Дробно-рациональные уравнения с параметром

- *Если одна часть уравнения - целое выражение, а другая - дробно-рациональное или обе части - дробно-рациональные выражения, то такое уравнение называют* ***дробно-рациональным*** *уравнением.*

- *Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:*
  1. *Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;*
  2. *Решить получившееся целое уравнение;*
  3. *Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.*
- *Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.*
  *ОДЗ – область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.*
- *Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.*

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$