

## Четность и периодичность функций

Если функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ , имеет период  $T$ , то любое число, кратное  $T$  (т.е. число вида  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), также является периодом.

$$f(x - kT) = f(x) = f(x + kT)$$

Основной период - наименьший положительный период.

### Примеры

№1. Найдите значение функции  $y = 2f(-a) \cdot (f(a) - 4g(-a)) + (g(-a))^2$ , если известно, что функция  $f(x)$  - четная, а  $g(x)$  - нечетная, и  $f(a) = 1, g(a) = -2$ .

№2. Нечетная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной  $x$  значение этой функции совпадает со значением функции  $g(x) = x(x+1)(x+3)(x-7)$ . Найдите значение функции  $h(x) = \frac{7f(x) + 7g(x)}{f(x) - g(x)}$  при  $x = -2$ .

№3. Нечетная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для каждого неотрицательного значения аргумента  $x$  значение этой функции на 9 меньше, чем значение функции  $g(x) = (x^2 - 5x - 3)^2$ . Найдите число корней уравнения  $f(x) = 0$ .

№4. Нечетная функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[-5; 5]$ . Для всякого неотрицательного значения переменной  $x \in [-5; 5]$  значение этой функции совпадает со значением функции  $g(x) = x(x+2)(x-1)(x-7)$ . Сколько корней имеет уравнение  $f(x) = 0$ ?

№5. Четная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной  $x$  значение этой функции совпадает со значением функции  $g(x) = -x(x^2 - 1)(x^2 - 9)$ . Какое количество целых чисел из отрезка  $[-5; 2]$  является решением уравнения  $|f(x) + g(x)| = 2f(x)$ ?

№6. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что  $f(1) = -1$ . Найдите значение выражения  $2f(13) - f(-8)$ .

№7. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел, причем на промежутке  $(-1; 2]$  она совпадает с функцией  $y = -x^2 + 4$ . Найдите значение выражения  $f(2006) - f(0) + 9$ .

---

№8. Найдите значение функции  $f(19)$ , если известно, что функция  $y = f(x)$  четная, имеет период 10 и на отрезке  $[0; 5]$  функция имеет вид  $y = 15 + 2x - x^2$ .

---

№9. Найдите значение параметра  $a$  (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции  $y = \cos^2((a^2 + 2a - 28)x)$  равен  $\frac{\pi}{20}$ .

---

№10. Найдите все пары  $(x; y)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{6}{f(x)-4} + \frac{1}{f(y)-1} = 2 \\ (f(y)-1)(f(x)-4) = 6f(y)-6 \end{cases}, \text{ где } f - \text{ периодическая функция с периодом } T=2,$$

определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = 10|x|$  при  $-1 \leq x \leq 1$ .

---

№11. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $f(x) = |a + 2|\sqrt[3]{x}$  имеет 4 решений, где  $f$  – четная периодическая функция с периодом  $T = \frac{16}{3}$ , определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = ax^2$ , если  $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$ .

▪ **Решение (примеры)** **Дополнительные задачи на четность и периодичность функций**

№1. Найдите значение функции  $y = 2f(-a) \cdot (f(a) - 4g(-a)) + (g(-a))^2$ , если известно, что функция  $f(x)$  - четная, а  $g(x)$  - нечетная, и  $f(a) = 1, g(a) = -2$ .

Решение:

$$y = 2f(a) \cdot (f(a) + 4g(a)) + (g(a))^2 = 2 \cdot 1 \cdot (1 + 4 \cdot (-2)) + 4 = -10.$$

Ответ: -10.

№2. Нечетная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной  $x$  значение этой функции совпадает со значением функции  $g(x) = x(x+1)(x+3)(x-7)$ . Найдите значение функции  $h(x) = \frac{7f(x) + 7g(x)}{f(x) - g(x)}$  при

$$x = -2.$$

Решение:

$f(-2) = -f(2)$ , т.к.  $f(x)$  - нечетная функция.

$$f(2) = g(2) = 2 \cdot (2+1)(2+3)(2-7) = -150 \text{ для всех } x \geq 0.$$

$$g(-2) = -2 \cdot (-2+1)(-2+3)(-2-7) = -18$$

$$h(-2) = \frac{7 \cdot f(-2) + 7 \cdot g(-2)}{f(-2) - g(-2)} = \frac{-7 \cdot (-150) + 7 \cdot (-18)}{-(-150) - (-18)} = 5,5$$

Ответ: 5,5.

№3. Нечетная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для каждого неотрицательного значения аргумента  $x$  значение этой функции на 9 меньше, чем значение функции  $g(x) = (x^2 - 5x - 3)^2$ . Найдите число корней уравнения  $f(x) = 0$ .

Решение:

Поскольку функция  $f(x)$  - нечетная, то  $f(-x) = -f(x)$  и корни уравнения  $f(x) = 0$  противоположны корням уравнения  $f(-x) = 0$ .

Для каждого  $x \geq 0$  по условию  $g(x) - f(x) = 9$ .

$$g(x) - 9 = f(x), f(x) = (x^2 - 5x - 3)^2 - 9.$$

Решим уравнение  $f(x) = 0$ .

$$(x^2 - 5x - 3)^2 - 9 = 0, \begin{cases} x^2 - 5x - 3 = 3 \\ x^2 - 5x - 3 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x = 6, x = -1, x = 5, x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, x = 6, x = 5, x = 0.$$

И, в силу нечетности функции  $f(x)$  числа  $-6$  и  $-5$  также являются корнями уравнения  $f(x) = 0$ .

Значит всего корней пять:  $\pm 6, \pm 5, 0$ .

Ответ: 5.

№4. Нечетная функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[-5; 5]$ . Для всякого неотрицательного значения переменной  $x \in [-5; 5]$  значение этой функции совпадает со значением функции  $g(x) = x(x+2)(x-1)(x-7)$ . Сколько корней имеет уравнение  $f(x) = 0$ ?

Решение:

Для всех  $x \in [0; 5]$   $f(x) = g(x) = x(x+2)(x-1)(x-7)$ . Корни уравнения  $f(x) = 0$   $x = 0, x = 1,$

$x = -2 \notin [0; 5]$  и  $x = 7 \notin [0; 5]$ . В силу нечетности функции  $f(x)$  есть корень противоположный корню  $x = 1$ , т.е.  $x = -1$ . Значит, уравнение всего имеет три корня  $\pm 1$  и  $0$ .

Ответ: 3.

№5. Четная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой.

Для всякого неположительного значения переменной  $x$  значение этой функции совпадает со значением функции  $g(x) = -x(x^2 - 1)(x^2 - 9)$ . Какое количество целых чисел из отрезка

$[-5; 2]$  является решением уравнения  $|f(x) + g(x)| = 2f(x)$  ?

Решение:

Функция  $g(x)$  – нечетная, поскольку  $g(-x) = -(-x)((-x)^2 - 1)((-x)^2 - 9) = x(x^2 - 1)(x^2 - 9) = -g(x)$

Функция  $f(x)$  – четная по условию, значит  $f(-x) = f(x)$ . По условию при  $x \leq 0$   $g(x) = f(x)$ .

Тогда при  $x \geq 0$   $g(x) = -f(x)$ .

При  $x \leq 0$  уравнение  $|f(x) + g(x)| = 2f(x)$  примет вид  $|2f(x)| = 2f(x)$ ,  $f(x) = f(x)$ ,

учитывая, что  $f(x) \geq 0$  при  $x \leq 0$ , значит, 
$$\begin{cases} -x(x^2 - 1)(x^2 - 9) \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}, \quad x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 0].$$

При  $x \geq 0$  уравнение  $|f(x) + g(x)| = 2f(x)$  примет вид  $f(x) = 0$ , его корни 1 и 3.

При всех  $x$  решением уравнения  $|f(x) + g(x)| = 2f(x)$  является множество

$(-\infty; -3] \cup [-1; 0] \cup \{1\} \cup \{3\}$ . На заданном отрезке  $[-5; 2]$  всего шесть целых чисел.

Ответ: 6.

№6. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что  $f(1) = -1$ . Найдите значение выражения  $2f(13) - f(-8)$ .

Решение:

$$T = 3 \Rightarrow f(13) = f(1 + 12) = f(1 + 3 \cdot 4) = f(1) = -1$$

$$f(-8) = f(-9 + 1) = f(-3 \cdot 3 + 1) = f(1) = -1$$

Ответ: -1.

$$2 \cdot f(13) - f(-8) = 2(-1) - (-1) = -2 + 1 = -1$$

№7. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел, причем на промежутке  $(-1; 2]$  она совпадает с функцией  $y = -x^2 + 4$ . Найдите значение выражения  $f(2006) - f(0) + 9$ .

Решение:

$$f(2006) = f(2004 + 2) = f(668 \cdot 3 + 2) = f(2).$$

$$2 \in (-1; 2], \quad f(2) = -2^2 + 4 = 0$$

$$0 \in (-1; 2], \quad f(0) = -0^2 + 4 = 4$$

$$f(2006) - f(0) + 9 = 0 - 4 + 9 = 5.$$

Ответ: 5.

№8. Найдите значение функции  $f(19)$ , если известно, что функция  $y = f(x)$  четная, имеет период 10 и на отрезке  $[0; 5]$  функция имеет вид  $y = 15 + 2x - x^2$ .

Решение:

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T), \quad \text{где } T \text{ – период функции } f(x).$$

$$f(19) = f(-1 + 20) = f(-1 + 2 \cdot 10) = f(-1) = f(1)$$

$$1 \in [0; 5], \quad f(1) = 15 + 2 - 1 = 16.$$

Ответ: 16.

№9. Найдите значение параметра  $a$  (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции  $y = \cos^2\left(\left(a^2 + 2a - 28\right)x\right)$  равен  $\frac{\pi}{20}$ .

Решение:

$$y = \frac{1 + \cos(2a^2 + 4a - 56)x}{2}, \quad T_y = \frac{T_{\cos x}}{|k|} = \frac{2\pi}{|2a^2 + 4a - 56|}$$

$$\frac{2\pi}{|2a^2 + 4a - 56|} = \frac{\pi}{20}, \quad |2a^2 + 4a - 56| = 40, \quad \begin{cases} a^2 + 2a - 28 = 20 \\ a^2 + 2a - 28 = -20 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = -8 \\ a = 6 \\ a = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$-8 \cdot 6 \cdot (-4) \cdot 2 = 384.$$

Ответ: 384.

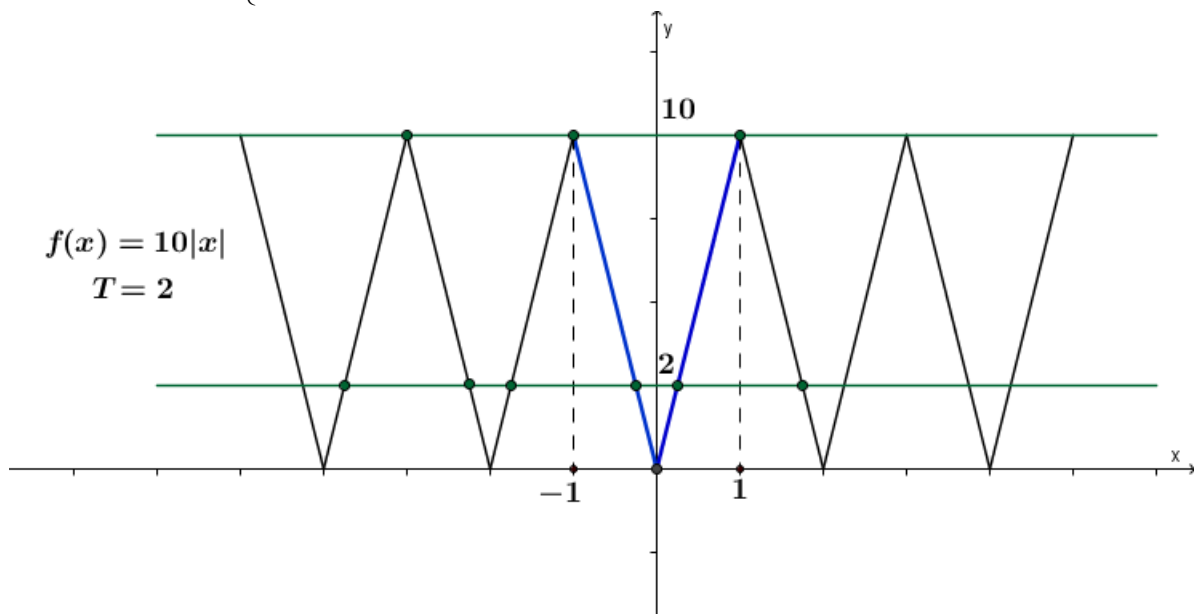
№10. Найти все пары  $(x; y)$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$  удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{6}{f(x)-4} + \frac{1}{f(y)-1} = 2 \\ (f(y)-1)(f(x)-4) = 6f(y) - 6 \end{cases}, \text{ где } f - \text{периодическая функция с периодом } T=2,$$

определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = 10|x|$  при  $-1 \leq x \leq 1$ .

Решение: Пусть  $f(x) - 4 = a, f(y) - 1 = b$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + \frac{1}{b} = 2 \\ b \cdot a = 6 \cdot b \end{cases}, \quad b \neq 0 \Rightarrow a = 6, b = 1 \quad \begin{cases} f(x) = 10 \\ f(y) = 2 \end{cases}$$



$f(x) = 10$  достигается в точках  $x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$ .

$f(y) = 2$  достигается в точках  $y = \pm 0,2 + 2k, k \in \mathbb{Z}$ .

Учитывая условие, что  $x \geq 0, y \leq 0$  получаем:

$$x = 1 + 2k, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y = -0,2 - 2n, n = 0, 1, 2, \dots \\ y = -1,8 - 2n, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ответ:  $(1 + 2k; -0,2 - 2n), (1 + 2k; -1,8 - 2n)$   
 $n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots$

№11. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $f(x) = |a + 2|\sqrt[3]{x}$  имеет 4 решений, где  $f$  – четная периодическая функция с периодом  $T = \frac{16}{3}$ , определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = ax^2$ , если  $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$ .

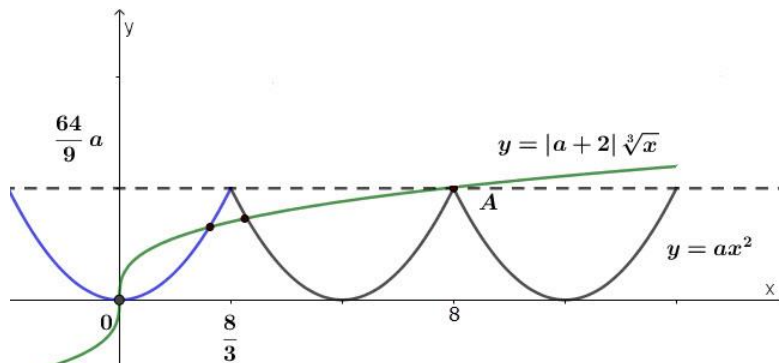
Решение:

1) Если  $a = 0$ , то с одной стороны  $f(x) = |a + 2|\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$ , с другой стороны  $f(x) = ax^2 = 0$ .

Уравнение  $2\sqrt[3]{x} = 0$ ,  $x = 0$  имеет единственное решение.

2) Если  $a > 0$ . Для построения графика четной функции  $f(x) = ax^2$  при  $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$  найдем  $f(0) = 0$  и

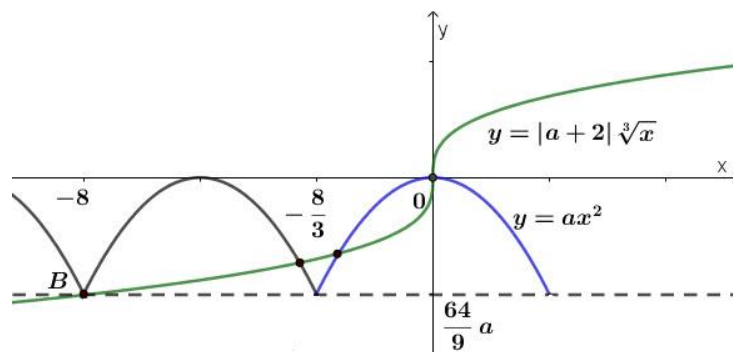
$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9}a.$$



Четыре точки пересечения прямой и графика периодической функции при  $x \geq 0$ . Координаты последней точки  $A\left(8; \frac{64}{9}a\right)$ . Найдем значение  $a$ , решив уравнение  $|a + 2|\sqrt[3]{8} = \frac{64}{9}a$ .

$$\begin{cases} |a + 2| = \frac{32a}{9} \\ a > 0 \end{cases}, \begin{cases} a + 2 = \frac{32a}{9} \\ a + 2 = -\frac{32a}{9} \\ a > 0 \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{18}{23} \\ a = -\frac{18}{41} \\ a > 0 \end{cases}, a = \frac{18}{23}.$$

3) Если  $a < 0$



Четыре решения, если прямая проходит через точку  $\left(-8; \frac{64}{9}a\right)$ .

$$\begin{cases} |a + 2|\sqrt[3]{-8} = \frac{64}{9}a \\ a < 0 \end{cases}, \begin{cases} a + 2 = -\frac{32a}{9} \\ a + 2 = \frac{32a}{9} \\ a < 0 \end{cases}, \begin{cases} a = -\frac{18}{41} \\ a = \frac{18}{23} \\ a = -\frac{18}{41} \end{cases}. \quad \text{Ответ: } -\frac{18}{41} \text{ и } \frac{18}{23}.$$

■ Тест **Дополнительные задачи на четность и периодичность функций**

№1. Найдите значение функции  $y = \frac{7f(a) \cdot (f(-a) - 2g(a)) - (g(-a))^2}{g(-a) + 3f(-a)}$ , если известно, что функция  $f(x)$  - четная, а  $g(x)$  - нечетная, и  $f(a) = 2, g(a) = -5$ .

---

№2. Четная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для функции  $g(x) = 1,6 + \frac{f(x-5,5)}{x-5,5}$  вычислите сумму  $g(5) + g(6)$ .

---

№3. Для четной функции  $f(x)$  и нечетной функции  $g(x)$  для всех действительных значений аргумента выполнено равенство  $f(x) + g(x) = 2x^2 - 7x - 5$ . Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения  $f(x) = g(x)$ .

---

№4. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 4, определена на множестве всех действительных чисел. Найдите значение выражения  $f(10) - f(-6)$ .

---

№5. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 2, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что  $f(1) = 5$ . Найдите значение выражения  $3f(7) - 4f(-3)$ .

---

№6. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 4, определена на множестве всех действительных чисел, причем на отрезке  $[-2; 2]$  она совпадает с функцией  $y = x^2 - 4$ . Найдите значение выражения  $f(2006) \cdot f(2007) - f(-1)$ .

---

№7. Найдите значение параметра  $a$  (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции  $y = \sin((2a+5)x)$  равен  $\frac{\pi}{2}$ .

---

№8. Найти все пары  $(x; y)$ ,  $x \leq 0, y \geq 0$  удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{2}{f(x)-3} + \frac{10}{f(y)-2} = 12 \\ (f(y)-2)(f(x)-3) = f(y)-2 \end{cases}, \text{ где } f - \text{ периодическая функция с периодом } T=2,$$

определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = 4|x|$  при  $-1 \leq x \leq 1$ .

---

№9. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $f(x) = |2a+5|x$  имеет 6 решений, где  $f$  - четная периодическая функция с периодом  $T = 2$ , определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = ax^2$ , если  $0 \leq x \leq 1$ .

▪ **Решение (тест)** **Дополнительные задачи на четность и периодичность функций**

№1. Найдите значение функции  $y = \frac{7f(a) \cdot (f(-a) - 2g(a)) - (g(-a))^2}{g(-a) + 3f(-a)}$ , если известно, что функция  $f(x)$  - четная, а  $g(x)$  - нечетная, и  $f(a) = 2, g(a) = -5$ .

Решение:

$$y = \frac{7f(a) \cdot (f(a) - 2g(a)) - (g(a))^2}{-g(a) + 3f(a)} = \frac{7 \cdot 2(2 - 2 \cdot (-5)) - 25}{5 + 3 \cdot 2} = 13.$$

Ответ: 13.

№2. Четная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для функции

$$g(x) = 1,6 + \frac{f(x-5,5)}{x-5,5} \text{ вычислите сумму } g(5) + g(6)$$

Решение:

$$g(5) = 1,6 + \frac{f(5-5,5)}{5-5,5} = 1,6 - 2 \cdot f(-0,5) = 1,6 + 2f(0,5)$$

$$g(6) = 1,6 + \frac{f(6-5,5)}{6-5,5} = 1,6 + 2 \cdot f(0,5) = 1,6 + 2f(0,5)$$

$$g(5) + g(6) = 1,6 - 2f(0,5) + 1,6 + 2f(0,5) = 3,2.$$

Ответ: 3,2.

№3. Для четной функции  $f(x)$  и нечетной функции  $g(x)$  для всех действительных значений аргумента выполнено равенство  $f(x) + g(x) = 2x^2 - 7x - 5$ . Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения  $f(x) = g(x)$ .

Решение:

Функция  $f(x)$  - четная,  $f(-x) = f(x)$ . Функция  $g(x)$  - нечетная,  $g(-x) = -g(x)$ .

$$f(-x) + g(-x) = 2(-x)^2 - 7(-x) - 5, \quad f(x) - g(x) = 2x^2 + 7x - 5.$$

$$2x^2 + 7x - 5 = 0, \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{4}, \quad x_1 + x_2 = -3,5.$$

Ответ: -3,5.

№4. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 4, определена на множестве всех действительных чисел. Найдите значение выражения  $f(10) - f(-6)$ .

Решение:

$$T = 4 \Rightarrow f(10) = f(2 + 2 \cdot 4) = f(2)$$

$$f(-6) = f(2 - 2 \cdot 4) = f(2)$$

$$f(10) - f(-6) = f(2) - f(2) = 0$$

Ответ: 0.



№5. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 2, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что  $f(1) = 5$ . Найдите значение выражения  $3f(7) - 4f(-3)$ .

Решение:

$$T = 2 \Rightarrow f(7) = f(1 + 3 \cdot 2) = f(1) = 5$$

$$f(-3) = f(1 - 2 \cdot 2) = f(1) = 5$$

$$3f(7) - 4f(-3) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = -5$$

Ответ: -5.

№6. Периодическая функция  $y = f(x)$  с периодом, равным 4, определена на множестве всех действительных чисел, причем на отрезке  $[-2; 2]$  она совпадает с функцией  $y = x^2 - 4$ . Найдите значение выражения  $f(2006) \cdot f(2007) - f(-1)$ .

Решение:

$$f(2004 + 2) \cdot f(2004 + 3) - f(-1) = f(2) \cdot f(3) - f(-1) =$$

$$= f(2) \cdot f(4 - 1) - f(-1) = f(2) \cdot f(-1) - f(-1) = f(-1)(f(2) - 1)$$

$$f(x) = x^2 - 4, x \in [-2; 2]$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3, f(2) = 2^2 - 4 = 0$$

$$f(-1) \cdot (f(2) - 1) = -3 \cdot (0 - 1) = 3$$

Ответ: 3.

№7. Найдите значение параметра  $a$  (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции  $y = \sin((2a + 5)x)$  равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Решение:

$$T_y = \frac{T_{\sin x}}{|k|} = \frac{2\pi}{|2a + 5|}, \quad \frac{2\pi}{|2a + 5|} = \frac{\pi}{2}, \quad |2a + 5| = 4, \quad \begin{cases} 2a + 5 = 4 \\ 2a + 5 = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = -0,5 \\ a = -4,5 \end{cases}.$$

$$-0,5 \cdot (-4,5) = 2,25.$$

Ответ: 2,25.

№8. Найти все пары  $(x; y)$ ,  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$  удовлетворяющие системе

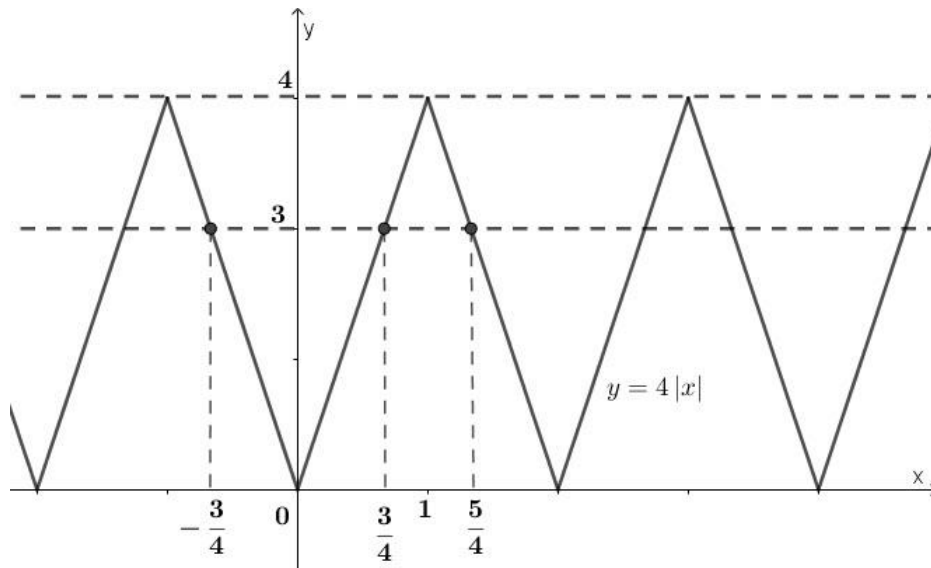
$$\begin{cases} \frac{2}{f(x) - 3} + \frac{10}{f(y) - 2} = 12 \\ (f(y) - 2)(f(x) - 3) = f(y) - 2 \end{cases}, \text{ где } f - \text{ периодическая функция с периодом } T=2,$$

определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = 4|x|$  при  $-1 \leq x \leq 1$ .

Решение: Пусть  $f(x) - 3 = a$ ,  $f(y) - 2 = b$ . Система примет вид

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{10}{b} = 12 \\ b \cdot a = b \end{cases}, \quad b \neq 0 \Rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\begin{cases} f(x) = 4 \\ f(y) = 3 \end{cases}$$



Наибольшее значение функции  $f(x) = 4$  достигается в точках  $x = 1 + 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Значение  $f(y) = 3$  достигается в точках  $y = \pm \frac{3}{4} + 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Учитывая условие, что  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$  получаем:

$$x = -1 - 2k, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4} + 2n, n = 0, 1, 2, \dots \\ y = \frac{5}{4} + 2n, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-1 - 2k; 0,75 + 2n), (-1 - 2k; 1,25 + 2n) \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

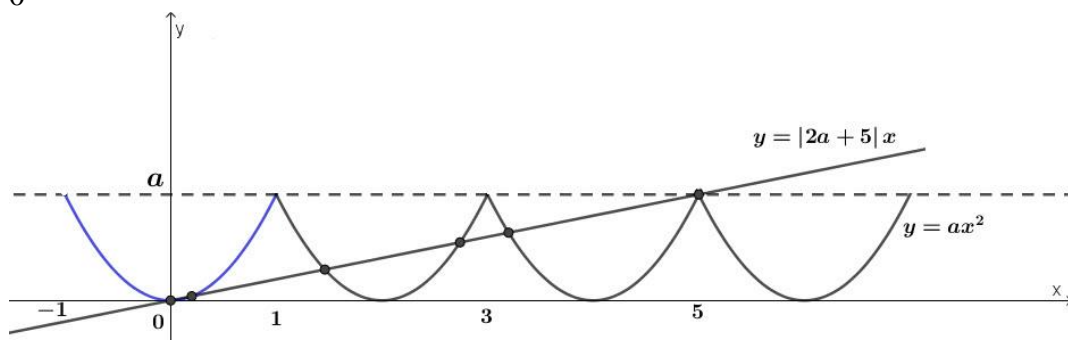
№9. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $f(x) = |2a + 5|x$  имеет 6 решений, где  $f$  – четная периодическая функция с периодом  $T = 2$ , определенная на всей числовой прямой, причем  $f(x) = ax^2$ , если  $0 \leq x \leq 1$ .

Решение:

1) Если  $a = 0$ , то с одной стороны  $f(x) = |2a + 5|x = 5x$ , с другой стороны  $f(x) = ax^2 = 0$ .

Уравнение  $5x = 0$ ,  $x = 0$  имеет единственное решение.

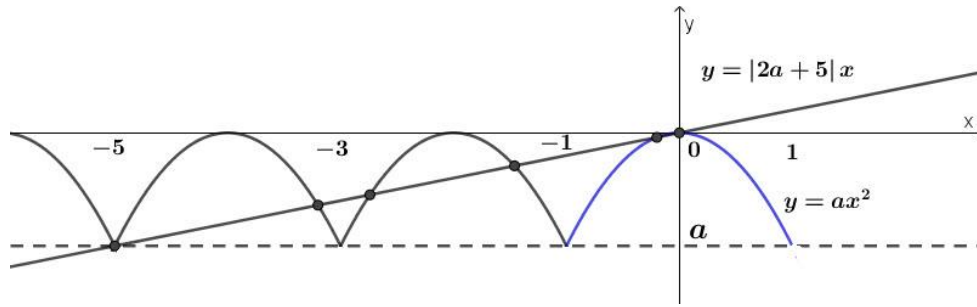
2) Если  $a > 0$



Решение  $x = 0$  есть при всех  $a$ . Нужно еще пять решений.

$$\text{Прямая проходит через точку } (5; a). \quad \begin{cases} |2a + 5| \cdot 5 = a \\ a > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = -\frac{25}{9}, \emptyset \\ a > 0 \end{cases}$$

3) Если  $a < 0$



Шесть решений, если прямая проходит через точку  $(-5; a)$ .

$$\begin{cases} |2a + 5| \cdot (-5) = a \\ a < 0 \end{cases}, \begin{cases} 2a + 5 = -\frac{a}{5} \\ 2a + 5 = \frac{a}{5} \\ a < 0 \end{cases}, \begin{cases} a = -\frac{25}{11} \\ a = -\frac{25}{9} \end{cases}.$$

Ответ:  $-\frac{25}{11}$  и  $-\frac{25}{9}$ .