

1. Модуль в целых уравнений

2. Методы решения целых уравнений с модулем

3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

1. Модуль в целых уравнениях

Примеры

Решите уравнения:

№1

$$|2x+3|=5$$

№2

$$|2x+3|=0$$

№3

$$|2x+3|=-7$$

№4

$$|2x+3|=4x+1$$

№5

$$\left| \sqrt{\left(\sqrt{(x-3)^2 - 7} \right)^2} + 5 \right| = 6$$

№6

$$2x+3+|x^2+x-3|=0$$

№7

$$|3x-9+|2-x||=5$$

Тест

1. Модуль в целых уравнениях

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $|5x+3|=2$

№2. $4x+11-|2x+5|=4$

№3. $||x-1|+2|-3|=1$

№4. $|x^2-7x+12|=x-4$

№5. $||x-1|-3x|=5$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $|4x-3|=5$

№2. $|8x+1|-4x-1=4$

№3. $\left| \sqrt{\left(\sqrt{(x+1)^2 - 2} \right)^2} + 3 \right| = 4$

№4. $3x+4+|x^2+5x-4|=0$

№5. $|2x-|x+2||=4$

▪ **Ответы (тест)** 1. Модуль в целых уравнениях

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	-1 и -0,2	-1	-1; 1 и 3	4	-1 и 2
Вар.2	-0,5 и 2	-0,5 и 1	-4; -2; 0 и 2	-8 и -4	-2 и 6

2. Методы решения целых уравнений с модулем

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1. $x^2 - 3\sqrt{x^2} + 2 = 0.$

№2. $x^2 + 6x - 4|x + 3| - 12 = 0.$

№3. $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|.$

№4. $|x^4 + 6x^3 + 5x^2| = -x^4 - 6x^3 - 5x^2.$

№5. $|x^4 - 4x^3 - 5x^2| = 45 + 36x - 9x^2.$

▪ **Тест** 2. Методы решения целых уравнений с модулем

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $x^2 + |x| - 2 = 0$

№2. $x^2 + \sqrt{x^2} - 12 = 0$

№3. $2(x-3)^2 - 5|x-3| + 2 = 0$

№4. $|x^4 - 5x^3 + 4x^2| = 20x - 4x^2 - 16$

№5. $|x^4 - 9x^3 + 14x^2| = 9x^2 - 14x^2 - x^4$

№6. $|x^2 - 5x + 4| = |x^2 - 4|$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $x^2 + \sqrt{x^2} - 30 = 0$

№2. $5(2x-1)^2 - 7|2x-1| - 6 = 0$

№3. $x^2 - 4x - 2|x-2| + 1 = 0$

№4. $|x^4 - 6x^3 + 8x^2| = 54x - 9x^2 - 72$

№5. $|x^4 - 7x^3 + 6x^2| = 7x^3 - 6x^2 - x^4$

№6. $|x^2 - 8x + 5| = |x^2 - 5|$

▪ **Ответы (тест)** 2. Методы решения целых уравнений с модулем

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар. 1	± 1	± 3	5; 1; 2,5 и 3,5	1; 2 и 4	$\{0\} \cup [2; 7]$	0; 1,6 и 2,5
Вар. 2	± 5	-0,5 и 1,5	-1 и 5	2; 3 и 4	$\{0\} \cup [1; 6]$	0; 1,25 и 4

3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1. $|x+1|+|x-5|=8.$

№2. $|x^2-4x|-|x-3|=7.$

№3. $|x^2-25|+|100-x^2|=75.$

№4. $\sqrt{(5x-3)^2}-\sqrt{(7x-4)^2}=2x-1.$

№5. $|x^2+x-20|+|x^2-11x+28|=2|x^2-5x+4|.$

▪ **Тест** 3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $|x-1|+|x+7|=12$

№2. $\sqrt{x^2-4x+4}=|2x+2|+1$

№3. $2|x^2+4x|-|x-5|+5=0$

№4. $3|1-x|-x-12=|2x+3|$

№5. $|x^2+3x-4|+|x^2+3x-28|=24$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $|x+3|+|x-1|=10$

№2. $\sqrt{4x^2+4x+1}-3=|x-2|$

№3. $|x^2-64|+|169-x^2|=105$

№4. $|5-2x|+|x+3|=2-3x$

№5. $|x^2-16|+|x+4|=x^2+x-12$

▪ **Ответы (тест)** 3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	-9 и 3	-3 и -1/3	-4,5; -3,5 и 0	-3	$[-7; -4] \cup [1; 4]$
Вар.2	-6 и 4	-6 и 4/3	$[-13; -8] \cup [8; 13]$	$(-\infty; -3] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}$	$\{-4\} \cup [4; \infty)$

4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1. $\frac{|x-2|}{|x-1|-1} = 1.$

№2. $\frac{3-|4-x|-|x-1|}{|5x^2-12x+4|} = 0.$

№3. $x^2 \left(21 - 9 \left| \frac{x+3}{x} \right| \right) + 6x + 9 = 0.$

№4. $\frac{5|x+7|}{x+7} + \frac{6|x+5|}{x+5} + \frac{10|x+4|}{x+4} + \frac{7|x+1|}{x+1} = -6.$

▪ **Тест** 4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $\frac{|x+1|}{|x+2|-1} = 1$

№2. $\frac{|x-5|+|2-x|-3}{|2x^2-15x+28|} = 0$

№3. $\frac{|x^2-25|-|81-x^2|-56}{\sqrt{182-x-x^2}} = 0$

№4. $\frac{6|x+2|}{x+2} + \frac{4|x-2|}{x-2} + \frac{8|x-5|}{x-5} + \frac{3|x-9|}{x-9} = -1$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $\frac{5}{3-|x-1|} = |x| + 2$

№2. $\frac{5-|x+2|-|3-x|}{|2+3x-2x^2|} = 0$

№3. $x^2 \left(22 - 10 \left| \frac{x+8}{x} \right| \right) + 16x + 64 = 0$

№4. $\left| \frac{3x^2-2x-5}{x-2} \right| + |x^2-x| = \left| \frac{x^3-5}{x-2} \right|$

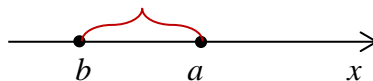
▪ **Ответы (тест)** 4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

	№1	№2	№3	№4
Вар. 1	$(-1; \infty)$	$[2; 3,5) \cup (3,5; 4) \cup (4; 5]$	$(-14; -9] \cup [9; 13)$	$(2; 5)$
Вар. 2	$\sqrt{5} - 2; 3$	$\left[-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 3]$	$-2; -1; \frac{4}{3}; 4$	$[-1; 0] \cup \left[1; 1\frac{2}{3}\right] \cup (2; \infty)$

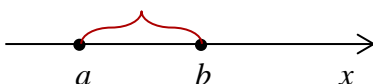
✓ **Модуль - это расстояние между точками a и b**

$$|a - b| = \rho(a; b)$$

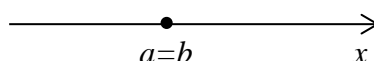
$$|a - b| = a - b, \text{ если } a > b$$



$$|a - b| = b - a, \text{ если } b > a$$



$$|a - b| = 0, \text{ если } b = a$$



Т.к. расстояние - это геометрическая величина, и оно принимает только неотрицательные значения, то $|a - b| \geq 0$

✓ **Правило раскрытия модуля**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Если подмодульное выражение больше или равно нулю, то модуль раскрываем со знаком «плюс»;

Если подмодульное выражение меньше нуля, то модуль раскрываем со знаком «минус».

✓ **Некоторые свойства модуля**

$$|x|^2 = x^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x| \geq 0$$

✓ Основные эквивалентности

1. $|f(x)| = a$

$\xrightarrow{a > 0} \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$

$\xrightarrow{a = 0} f(x) = 0$

$\xrightarrow{a < 0} x \in \emptyset$

2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

3. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ или $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$