

*Размещение на сайте [mathcourse.ru](http://mathcourse.ru)*

- Тематические курсы/Уравнения/Тригонометрические /Формулы приведения в уравнениях
- ЕГЭ Профиль/*Задание №12*/ Тригонометрические уравнения
- Алгебра 10 / Тригонометрические уравнения/Формулы приведения в уравнениях

## Методы решения тригонометрических уравнений

1. Разложение на множители
2. Уравнения из Диагностик для профильных классов
3. Формулы понижения степени, двойной угол
4. Синус и косинус суммы и разности аргументов

## 1. Разложение на множители

### ▪ Примеры

- №1. а) Решите уравнение  $2\sin^3 x - 2\sin x + \cos^2 x = 0$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .
- 

- №2. а) Решите уравнение  $4\cos^3 x + 3 = 4\cos^2 x + 3\cos x$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .
- 

- №3. а) Решите уравнение  $2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$ .  
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .
- 

- №4. а) Решите уравнение  $4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sin x = 4\sqrt{3}$ .  
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .
- 

- №5. а) Решите уравнение  $\cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x + 1$ .  
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .
- 

- №6. а) Решите уравнение  $(2 - 3x - 2x^2)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$ .  
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ .
- 

- №7. а) Решите уравнение  $2x\cos x - 8\cos x + x - 4 = 0$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

▪ **Тест** 1. ЕГЭ Профиль Задание №12. Разложение на множители

- №1. а) Решите уравнение  $2 \cos x - 2 \cos^3 x + \sin^2 x = 0$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

- №2. а) Решите уравнение  $4 \sin^3 x + 1 = 4 \sin^2 x + \sin x$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\pi; 2\pi]$ .

- №3. а) Решите уравнение  $2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$ .  
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

- №4. а) Решите уравнение  $7 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 4\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 4 \cos^3 x$ .  
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

- №5. а) Решите уравнение  $(3x^2 - 19x + 20)(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$ .  
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

▪ **Ответы (тест)** 1. ЕГЭ Профиль Задание №12. Разложение на множители

№1	№2	№3	№4	№5
а) $\pi n$ , $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ; б) $3\pi, \frac{10\pi}{3}, 4\pi$ .	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ; б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ .	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ; б) $\frac{7\pi}{3}$ .	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ ; б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}$ .	а) $5, \frac{4}{3}$ , $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ; б) $5, \frac{17\pi}{6}$ .

## 2. Уравнения из Диагностик для профильных классов

### Примеры

№1. а) Решите уравнение  $4 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin \frac{x}{2}}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-2\pi; -\pi]$ .

---

№2. а) Решите уравнение  $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$ .

---

№3. Решите уравнение  $\operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 4x + \cos x = \cos 4x - \sqrt{3} \sin x$ .

---

№4. Решите уравнение  $\frac{\cos^2 x + \sin^2 0,5x - 1}{\operatorname{ctg} x} = 0$ .

---

№5. Решите уравнение  $\frac{4 \sin x - 2 \cos 2x - 1}{\cos 2x - \sqrt{3} \cos x - 2} = 0$ .

---

№6. Решите уравнение  $\operatorname{tg} 4x \cdot \sin^4 \left( \frac{x}{2} - \frac{3\pi}{16} \right) - \operatorname{tg} 4x \cdot \cos^4 \left( \frac{x}{2} - \frac{3\pi}{16} \right) = 0$ .

---

№7. Решите уравнение  $\operatorname{ctg} 3x \cdot \sin^4 \left( \frac{x}{2} + \frac{7\pi}{12} \right) - \operatorname{ctg} 3x \cdot \cos^4 \left( \frac{x}{2} + \frac{7\pi}{12} \right) = 0$ .

▪ **Тест** 2. Уравнения из Диагностик для профильных классов

№1. а) Решите уравнение  $4 \cos x \cdot \cos 2x = \frac{\cos 2x}{\sin x}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

№2. а) Решите уравнение  $\frac{\sin 2x - \sqrt{2} \cos x}{\operatorname{tg} x + 1} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ .

№3. Решите уравнение  $\operatorname{tg} 3x \cdot \sin 6x + \cos x = \sin x - \cos 6x$ .

№4. Решите уравнение  $\frac{\cos^2 x + \cos^2 2x - 1}{\operatorname{ctg} 2x} = 0$ .

№5. Решите уравнение  $\frac{2 \cos 2x - 4 \cos x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3} \sin x + 2} = 0$ .

№6. Решите уравнение  $\operatorname{tg} 2x \cdot \sin^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) - \operatorname{tg} 2x \cdot \cos^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$ .

**Ответы (тест)** 2. Уравнения из Диагностик для профильных классов

№1	№2	№3	№4	№5	№6
<p>а) <math>\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{12} + \pi k,</math>  <math>\frac{5\pi}{12} + \pi k;</math>            б) <math>\frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}</math></p>	<p>а) <math>\frac{\pi}{4} + 2\pi n;</math>            б) <math>\frac{17\pi}{4}</math></p>	<p><math>\pi + 2\pi n</math></p>	<p><math>\pm \frac{\pi}{6} + \pi n</math></p>	<p><math>\frac{2\pi}{3} + 2\pi k</math></p>	<p><math>\frac{\pi m}{2}</math></p>

### 3. Формулы понижения степени, двойного угла.

#### ■ Примеры

№1. а) Решите уравнение  $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

---

№2. Решите уравнение  $4 \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 6 \sin x + 1 = \cos 2x$ .

---

№3. а) Решите уравнение  $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \cos 2x$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

---

№4. Решите уравнение  $\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

---

№5. Решите уравнение  $1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \sin 2x$ .

---

№6. Решите уравнение  $2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \sin 2x = 0$ .

---

№7. а) Решите уравнение  $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

---

№8. а) Решите уравнение  $\cos^2 \left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = \cos^2 \left(\frac{5\pi}{6} + x\right)$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

---

№9. а) Решите уравнение  $\sin 2x + 2 \cos^2 x + \cos 2x = 0$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$ .

---

№10. а) Решите уравнение  $2 \sin 2y - 2 \cos 2y \cdot \cos y = \cos y$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие множеству значений функции  $f(x) = \pi - 2 \arccos x$ .

■ Тест 3. Формулы понижения степени, двойного угла

№1. а) Решите уравнение  $\sin 2x + \sin x = \cos x + \frac{1}{2}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

---

№2. Решите уравнение  $4\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos 2x + 2\cos(\pi + x) = 1$ .

---

№3. а) Решите уравнение  $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos 2x$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

---

№4. а) Решите уравнение  $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

---

№5. а) Решите уравнение  $\sin^2\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 0,375 \cdot \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-3\pi; \pi]$ .

---

№6. а) Решите уравнение  $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

---

№7. а) Решите уравнение  $2\sin y \cdot \cos 2y - 3\sin 2y = 2\sin y$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие множеству значений функции

$$f(x) = \arcsin x - \frac{\pi}{2}.$$

▪ **Ответы (тест)** 3. Формулы понижения степени, двойного угла

№1	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ; б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}$ .
№2	$\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi k$
№3	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n$ ; б) $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, 0$ .
№4	а) $\frac{\pi k}{2}$ ; б) $\frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, 4\pi$
№5	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ; б) $-\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ .
№6	а) $\frac{\pi k}{2}$ ; б) $-\frac{5\pi}{2}, -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi$ .
№7	а) $\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ; б) $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0$ .

## 4. Синус и косинус суммы и разности аргументов

### Примеры

№1. а) Решите уравнение  $\sin \frac{7x}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos^2 3x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \pi; \frac{3\pi}{2} \right]$ .

№2. а) Решите уравнение  $\cos^2 x + \sin x = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$ .

№3. а) Решите уравнение  $2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$ .

№4. а) Решите уравнение  $2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cos 2x = \sin x + \sqrt{3}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$ .

№5. а) Решите уравнение  $\sin x + 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$ .

№6. а) Решите уравнение  $\cos x + 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) - 1 = \sqrt{3} \sin 2x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ 4\pi; \frac{11\pi}{2} \right]$ .

№7. а) Решите уравнение  $\sqrt{6} \cos x + 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} = \sin 2x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ 3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$ .

№8. а) Решите уравнение  $8 \sin^2 \left( \frac{7\pi}{12} + x \right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \right]$ .

№9. а) Решите уравнение  $\sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos x + \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin x$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{11\pi}{2}; -4\pi \right]$ .

▪ Тесты 4. Синус и косинус суммы и разности аргументов

№1. а) Решите уравнение  $\sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos^2 x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ .

№2. а) Решите уравнение  $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$ .

№3. а) Решите уравнение  $\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin^2 x = \sin x + 2$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ 2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$ .

№4. а) Решите уравнение  $2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 2x = \sqrt{3} \cos x + 1$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$ .

№5. а) Решите уравнение  $2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos x = \sqrt{3} \sin 2x - 1$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$ .

№6. а) Решите уравнение  $\cos x + \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \sin 2x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{11\pi}{2}; -4\pi \right]$ .

№7. а) Решите уравнение  $\sqrt{6} \sin x + 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x - \sqrt{3}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$ .

№8. а) Решите уравнение  $\sqrt{2} \sin 2x + 4 \cos^2 \left( \frac{3\pi}{8} + x \right) = 2 + \sqrt{2}$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ .

№9. а) Решите уравнение  $\sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos x + \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin x$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -5\pi - \frac{7\pi}{2}; \right]$ .

▪ **Ответы (тесты)** 4. Синус и косинус суммы и разности аргументов

№1	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}$ .
№2	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi k$ ; б) $-2\pi, -\pi, -\frac{7\pi}{6}$
№3	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ; б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$
№4	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi k$ ; б) $-3\pi, -2\pi, -\frac{11\pi}{6}$
№5	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k$ ; б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}$
№6	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k$ ; б) $-\frac{11\pi}{2}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}, -\frac{9\pi}{2}$
№7	а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \pi k$ ; б) $-3\pi, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -2\pi$
№8	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ; б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$
№9	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ; б) $-\frac{9\pi}{2}, -\frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{2}$

✓ Основные тригонометрические формулы

1.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2.  $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
3.  $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
4.  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
5.  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$
6.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$
7.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
8.  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
9.  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
10.  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
11.  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
12.  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
13.  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
14.  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$
15.  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$
16.  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
17.  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
18.  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
19.  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
20.  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
21.  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$
22.  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
23.  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
24.  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
25.  $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
26.  $\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
27.  $\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$
28.  $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
29.  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
30.  $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$