

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$$

$\underbrace{(x^2 - x + 1)^4}_{g^2(x)}$ $\underbrace{(x^2 - x + 1)^2}_{g(x)}$ $\underbrace{9x^4}_{f^2(x)}$

$\underbrace{10x^2}_{f(x)}$

орой степени.

1. Методы решения целых уравнений

2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

3. Методы решения дробно-рациональных уравнений

1. Методы решения целых уравнений

▪ Примеры

Решите уравнения:

№1. Решите уравнение $x(x+2)(x+3)(x+5) = 72$.

№2. Решите уравнение $(x-2)(x-3)(x-8)(x-12) = 4x^2$.

№3. Решите уравнение $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 9x + 20) = 25(x^2 - 7x) + 118$.

№4. Решите уравнение $150x - 5x^2 - 10x^3 + x^4 + 125 = 0$.

№5. Решите уравнение $(4x+3)(2-4x)(16x^2+24x+14) = 4(4x+4)^2$.

▪ **Тест** 1. Методы решения целых уравнений

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $(x+6)(x+7)(x+9)(x+10)=10$

№2. $(x-3)(x-9)(x^2+8x+12)=56x^2$

№3. $(x^2-11x+30)(x^2-15x+56)=86(x^2-13x)+1677$

№4. $x^4-12x^3-6x^2+252x+216=0$

№5. $(2x+3)(1-2x)(4x^2+12x+13)=3(2x+4)^2$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=105$

№2. $(x-3)(x+9)(x^2-4x-12)=300x^2$

№3. $(2x+1)(3-2x)(4x^2+4x+5)=3(2x+2)^2$

№4. $80x-4x^2-8x^3+x^4+64=0$

№5. $25(x+13)(x+16)(x+21)=432x$

▪ **Ответы (тест)** 1. Методы решения целых уравнений

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$-8 \pm \sqrt{6}$	$\frac{11 \pm \sqrt{193}}{2}, 2 \text{ и } -9$	$\frac{13 \pm \sqrt{173}}{2}, \frac{13 \pm \sqrt{181}}{2}$	$3 \pm 3\sqrt{5}, 3 \pm \sqrt{15}$	$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$
Вар.2	$-6 \text{ и } 2$	$\frac{-21 \pm \sqrt{369}}{2}, 1 \text{ и } 18$	$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$	$2 \pm 2\sqrt{5}, 2 \pm 2\sqrt{2}$	-25

2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

- ✓ Уравнение вида $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) \cdot g(x) + c \cdot g^2(x) = 0$ называют **однородным второй степени**.

Найдите те значения переменной, при которых $f(x) = 0$ или $g(x) = 0$.

Проверкой установите: является или нет, это значение корнем уравнения. Сводим к квадратному уравнению делением на одно из выражений в квадрате: $f^2(x)$ или $g^2(x)$.

$$a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) \cdot g(x) + c \cdot g^2(x) = 0 \quad | :g^2(x)$$

$$a \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} + b \cdot \frac{f(x) \cdot g(x)}{g^2(x)} + c = 0$$

$$a \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 + b \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + c = 0$$

$$t = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$$

- ✓ В уравнениях вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$ рекомендуется делать замену $t = x - \frac{a+b}{2}$.

Примеры

Решите уравнения:

№1. Решите уравнение $60x - 38x^2 - 3x^3 + x^4 + 400 = 0$.

№2. Решите уравнение $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$.

№3. Решите уравнение $(x^2 + 2x - 5)^4 + (x^2 - 4x - 5)^4 = 272x^4$.

№4. а) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7 \left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} \right) - 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

▪ **Тест** 2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

№2. $x^4 - 10x^2 - 3x^3 - 45x + 225 = 0$

№3. $(x^2 + 2)^2 + x(x^2 + 2) = 12x^2$

№4. $2x^4 - x^2(x + 2) - (x + 2)^2 = 0$

№5. $(x^2 + x + 1)^2 - 14(x - 1)^2 = 5(x^3 - 1)$

№6. $(\sqrt{x} + 1)^4 + (\sqrt{x} - 3)^4 = 32$

№7. а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0$

№2. $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0$

№3. $3x(x^2 + 1) + (x^2 - 4x + 1)^2 = 12x^2$

№4. $3x^4 + 2x^2(x - 2) - (x - 2)^2 = 0$

№5. $10(x^2 - x + 1)^2 - 3(x + 1)^2 = 7(x^3 + 1)$

№6. $(\sqrt{x} - 4)^4 + (\sqrt{x} - 8)^4 = 32$

№7. а) Решите уравнение $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8\left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right) + 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6; -4]$.

▪ **Ответы (тест)** 2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
Вар. 1	$1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$	3 и 5	$1; 2; -2 \pm \sqrt{2}$	-1; 2	$2; 4; \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$	1	а) -1; 4; $6 \pm \sqrt{22}$ б) -1; $6 - \sqrt{22}$
Вар. 2	$1; \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$	$2 \pm \sqrt{2}$	$2 \pm \sqrt{3}$	-2; 1	0 и 2	36	а) -5; 2; $\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$ б) -5; $-\frac{1 + \sqrt{65}}{2}$

3. Методы решения дробно-рациональных уравнений

Примеры

Решите уравнения:

№1. Решите уравнение $\frac{2}{8x^3 + 4x^2 - 2x - 1} + \frac{1}{1 - 4x^2} + \frac{x}{4x^2 + 4x + 1} = 0$.

№2. Решите уравнение $1 + \left(2 + (x + 3^{-1})^{-1}\right)^{-1} = \frac{9x + 6}{6x + 5}$.

№3. Решите уравнение $\frac{x(3-x)}{\frac{1}{x-7} - \frac{2}{x-10}} = \frac{4}{\frac{2}{x-10} + \frac{1}{7-x}}$.

№4. Решите уравнение $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$.

№5. Решите уравнение $x^2 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 21$.

№6. Решите уравнение $\frac{20x}{x^2 + 3x + 10} + 1 = \frac{20x}{x^2 + 2x + 10}$.

✓ Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1. Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
2. Решить получившееся целое уравнение;
3. Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.

✓ Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.

✓ Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Вариант 1

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{1}{(3x-2)^2} = \frac{x+1}{9x^3-4x} + \frac{3x}{27x^3-18x^2-12x+8}$$

$$\text{№2. } 1 + \left(3 + (2 + x^{-1})^{-1}\right)^{-1} = \frac{9x+4}{7x+3}$$

$$\text{№3. } \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = 0$$

$$\text{№4. } x^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 = 27$$

Вариант 2

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{4x}{x^2+4x-1} + \frac{2x}{x^2+2x-1} = 2$$

$$\text{№2. } \frac{8}{x^2+x+3} + \frac{10}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{x}$$

$$\text{№3. } 6\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2} + 5\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2} = 11\frac{x^2-16}{x^2-9}$$

Вариант 3

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{4}{x^2-16} - \frac{1}{x^2+8x+16} = \frac{10}{x^3-4x^2-16x+64}$$

$$\text{№2. } \frac{x(x+1)}{\frac{2}{x-6} + \frac{1}{4-x}} = \frac{6}{\frac{2}{x-6} - \frac{1}{x-4}}$$

$$\text{№3. } \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 0$$

$$\text{№4. } x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40$$

Вариант 4

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{4x}{x^2-4x+1} + \frac{3x}{x^2+x+1} = -1$$

$$\text{№2. } -\frac{10}{x^2-x-6} + \frac{9}{x^2-5x-6} = \frac{1}{x}$$

$$\text{№3. } \frac{(x+1)^2}{(x-3)^2} + 14\frac{x^2-1}{x^2-9} = 15\frac{(x-1)^2}{(x+3)^2}$$

▪ **Ответы (тест)** 3. Методы решения дробно-рациональных уравнений

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	1	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{7}\right)$ $\cup \left(-\frac{3}{7}; 0\right) \cup (0; \infty)$	$5,5 \text{ и } \frac{11 + \sqrt{5}}{2}$	$\frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$
Вар.2	$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$	$\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$	-12; 0; 1	
Вар.3	-3 и 10/3	-3	$3,5 \text{ и } \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$	-6 и 2
Вар.4	1 и $-3 \pm 2\sqrt{2}$	$\frac{9 \pm \sqrt{105}}{2}; -2 \pm \sqrt{10}$	0; 1,5; 2	