

Модуль в дробно-рациональных уравнениях

■ Примеры

Решите уравнения:

№1. $\frac{|x-2|}{|x-1|-1} = 1.$

№2. $\frac{3-|4-x|-|x-1|}{|5x^2-12x+4|} = 0.$

№3. $x^2 \left(21 - 9 \left| \frac{x+3}{x} \right| \right) + 6x + 9 = 0.$

№4. $\frac{5|x+7|}{x+7} + \frac{6|x+5|}{x+5} + \frac{10|x+4|}{x+4} + \frac{7|x+1|}{x+1} = -6.$

Вариант 1

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{|x+1|}{|x+2|-1} = 1$$

$$\text{№2. } \frac{|x-5| + |2-x| - 3}{|2x^2 - 15x + 28|} = 0$$

$$\text{№3. } \frac{|x^2 - 25| - |81 - x^2| - 56}{\sqrt{182 - x - x^2}} = 0$$

$$\text{№4. } \frac{6|x+2|}{x+2} + \frac{4|x-2|}{x-2} + \frac{8|x-5|}{x-5} + \frac{3|x-9|}{x-9} = -1$$

Вариант 2

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{5}{3 - |x-1|} = |x| + 2$$

$$\text{№2. } \frac{5 - |x+2| - |3-x|}{|2 + 3x - 2x^2|} = 0$$

$$\text{№3. } x^2 \left(22 - 10 \left| \frac{x+8}{x} \right| \right) + 16x + 64 = 0$$

$$\text{№4. } \left| \frac{3x^2 - 2x - 5}{x-2} \right| + |x^2 - x| = \left| \frac{x^3 - 5}{x-2} \right|$$

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	$(-1; \infty)$	$[2; 3,5) \cup (3,5; 4) \cup (4; 5]$	$(-14; -9] \cup [9; 13)$	$(2; 5)$
Вар.2	$\sqrt{5} - 2; 3$	$\left[-2; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 2 \right) \cup (2; 3]$	$-2; -1; \frac{4}{3}; 4$	$[-1; 0] \cup \left[1; 1\frac{2}{3} \right] \cup (2; \infty)$

✓ Правило раскрытия модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Если подмодульное выражение больше или равно нулю, то модуль раскрываем со знаком «плюс»;
Если подмодульное выражение меньше нуля, то модуль раскрываем со знаком «минус».

✓ Некоторые свойства модуля

$$\begin{aligned} |x|^2 &= x^2 \\ \sqrt{x^2} &= |x| \\ |x| &= |-x| \\ |x| &\geq 0 \end{aligned}$$

✓ Основные эквивалентности

1.

$$\begin{array}{c} |f(x)| = a \\ \downarrow \\ \begin{array}{l} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} a = 0 \\ f(x) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} a < 0 \\ x \in \emptyset \end{array} \end{array}$$

2.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

3.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases}$$

или

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases}$$