

Методы решения дробно-рациональных уравнений

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1.
$$\frac{2}{8x^3 + 4x^2 - 2x - 1} + \frac{1}{1 - 4x^2} + \frac{x}{4x^2 + 4x + 1} = 0.$$

№2.
$$1 + \left(2 + (x + 3^{-1})^{-1} \right)^{-1} = \frac{9x + 6}{6x + 5}.$$

№3.
$$\frac{x(3-x)}{\frac{1}{x-7} - \frac{2}{x-10}} = \frac{4}{\frac{2}{x-10} + \frac{1}{7-x}}.$$

№4.
$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}.$$

№5.
$$x^2 + \left(\frac{2x}{x+2} \right)^2 = 21.$$

№6.
$$\frac{20x}{x^2 + 3x + 10} + 1 = \frac{20x}{x^2 + 2x + 10}.$$

Вариант 1

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{1}{(3x-2)^2} = \frac{x+1}{9x^3-4x} + \frac{3x}{27x^3-18x^2-12x+8}$$

$$\text{№2. } 1 + \left(3 + (2 + x^{-1})^{-1}\right)^{-1} = \frac{9x+4}{7x+3}$$

$$\text{№3. } \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = 0$$

$$\text{№4. } x^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 = 27$$

Вариант 2

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{4x}{x^2+4x-1} + \frac{2x}{x^2+2x-1} = 2$$

$$\text{№2. } \frac{8}{x^2+x+3} + \frac{10}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{x}$$

$$\text{№3. } 6\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2} + 5\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2} = 11\frac{x^2-16}{x^2-9}$$

Вариант 3

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{4}{x^2-16} - \frac{1}{x^2+8x+16} = \frac{10}{x^3-4x^2-16x+64}$$

$$\text{№2. } \frac{x(x+1)}{\frac{2}{x-6} + \frac{1}{4-x}} = \frac{6}{\frac{2}{x-6} - \frac{1}{x-4}}$$

$$\text{№3. } \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 0$$

$$\text{№4. } x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40$$

Вариант 4

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{4x}{x^2-4x+1} + \frac{3x}{x^2+x+1} = -1$$

$$\text{№2. } -\frac{10}{x^2-x-6} + \frac{9}{x^2-5x-6} = \frac{1}{x}$$

$$\text{№3. } \frac{(x+1)^2}{(x-3)^2} + 14\frac{x^2-1}{x^2-9} = 15\frac{(x-1)^2}{(x+3)^2}$$

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	1	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{7}\right)$ $\cup \left(-\frac{3}{7}; 0\right) \cup (0; \infty)$	5,5 и $\frac{11+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$
Вар.2	$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$	$\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$	-12; 0; 1	
Вар.3	-3 и 10/3	-3	3,5 и $\frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$	-6 и 2
Вар.4	1 и $-3 \pm 2\sqrt{2}$	$\frac{9 \pm \sqrt{105}}{2}; -2 \pm \sqrt{10}$	0; 1,5; 2	

Справочные материалы

- ✓ Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:
 1. Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
 2. Решить полученное целое уравнение;
 3. Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.
- ✓ Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.
- ✓ Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$