



- Тематические курсы/Уравнения/
Тригонометрические/
Уравнения с параметром
- ЕГЭ Профиль/ **Задание №18**
- 10 класс/Тригонометрические
уравнения/Уравнения с параметром

Тригонометрические уравнения с параметром

1. Свойства функции в задачах с параметром. Область значений функции
 2. Уравнения, сводящиеся к квадратным
 3. Дополнительные условия на корни
 4. Графический способ решения уравнений
 5. Комбинированные уравнения

1. Свойства функции в задачах с параметром. Область значений функции

Примеры

№1. При каких значениях параметра a уравнение $2 \cos 3x = a^2 + 2a - 2$ имеет решение?

№2. Найдите все значения p , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - 6x + 10)^2 + (x^2 - 2p^2 + 7p)^2 = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}x\right)$$

имеет хотя бы один корень.

№3. Найти все значения p , при которых уравнение $4 \sin x + 9 = p(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ имеет решение.

№4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2 \sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

№5. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{1 + (2 - 2k)\sin t}{\cos t - \sin t} = 2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

№6. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2 + (4 - 4k)\cos t}{4\cos t - \sin t} = 1$ не имеет решений на интервале $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

№7. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2a \cdot \sin(\cos x) + 2 = 0$ имеет единственное решение?

№8. Найдите все значения $0 \leq a \leq 2\pi$, при каждом из которых уравнение $\sin^2 a + \cos^8 \frac{a}{2} + 5^{x^4} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$ имеет единственное решение?

№9. При каких значениях a уравнение $2\pi^2(x-1)^2 + 4a \cdot \cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственное решение?

№10. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $5 \cos^2 x + \left(2a - \frac{1}{2a}\right)|\sin x| = 2a^2 - 3a + 3$ имеет ровно три решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите эти решения.

№11. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых область значений функции

$$y = \frac{\sin x + a}{\cos 2x - 2} \text{ содержит число } 2.$$

№12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{\sqrt{a} - 2 \cos x + 1}{\sin^2 x + a + 2\sqrt{a} + 1} \text{ содержит отрезок } [2; 3].$$

▪ **Ответы (примеры)**

1. Свойства функции

№1	№2	№3	№4	№5	№6
$[-1 - \sqrt{5}; -2];$ $[0; -1 + \sqrt{5}]$	-1	(0; 13]	$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2} \right);$ $\{\sqrt{5}\}$	$\frac{1}{2} < k < \frac{2 + \sqrt{2}}{2},$ $k > \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$	$k = 1 - \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $k > -\frac{\sqrt{3}}{4}$
№7	№8	№9	№10	№11	№12
$\frac{1}{\sin 1}$	$a = \pi$	$a = 0,$ $a = -\frac{2}{3}$	при $a = 2$ решения $x = 0$ и $x = \pm \arcsin \frac{3}{4}$	$\left[-7; -\frac{31}{16} \right]$	$a = 0$

▪ Тест

1. Свойства функции

Вариант 1

№1. При каких значениях параметра a уравнение $3 \cos \pi x = 2a + 5$ имеет решение?

№2. При каких значениях параметра a уравнение $3 \sin 5x = a^2 + 3a - 3$ имеет решение?

№3. Найдите все значения p , при каждом из которых уравнение $(x^2 - 4x + 5)^2 + (x^2 - p^2 - 3p)^2 = \cos\left(p\pi + \frac{\pi}{2}x\right)$ имеет хотя бы один корень.

№4. Найти все значения p , при которых уравнение $8 \sin^3 x = p - 7 \cos 2x$ не имеет решений.

№5. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t - k}{\sin t + \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

№6. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $2 \cos^2 x + \left(2a - \frac{1}{2a}\right)|\sin x| = 2a^2 - 3a + 3$ имеет ровно три решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите эти решения.

№7. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых область значений функции $y = \frac{\cos x - a}{\cos 2x - 4}$ содержит число -2 .

Вариант 2

№1. При каких значениях параметра a уравнение $3 \sin \pi x = 2a - 5$ имеет решение.

№2. Найти все значения параметра p , при которых уравнение $\cos^2 x + (p+2)\cos x + 3p+1 = 0$ не имеет корней.

№3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3 \sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

№4. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2 - (4 - 4k)\sin t}{\cos t - 4 \sin t} = 1$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№5. Найдите все значения $0 \leq a \leq 2\pi$, при каждом из которых уравнение $\sin^2 a + \cos^8 \frac{a}{2} + 5^{x^4} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$ имеет единственное решение?

№6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{\sqrt{a-1} - 2 \sin 2x + 1}{\cos^2 2x + a + 2\sqrt{a-1}}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

▪ **Ответы (тест)**

1. Свойства функции

	Вар.1	Вар.2
№1.	$[-4; -1]$	$[1; 4]$
№2.	$\left[\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}; -3\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{33} - 3}{2}\right]$	$(-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
№3.	$p = 1$	$a \in [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$
№4.	$(-\infty; -15) \cup (7; \infty)$	$\frac{1}{2} \leq k < 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}, k > 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$
№5.	$-2 \leq k < -2 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2} < k \leq 0$	$a = \pi$
№6.	$a = 1, x = 0 \quad x = \pm \frac{\pi}{6}$	$1 \leq a \leq \frac{21 - 3\sqrt{17}}{8}$
№7.	$-\frac{161}{16} \leq a \leq -5$	

2. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Примеры

1. При каких значениях a уравнение $2 \cos 2x + 4 \sin x + a^2 - 2a - 2 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

2. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\cos^4 x - 4 \sin^2 x - a + 1 = 0$ имеет решение.

3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(a + 3) \cos^2 x + 2(a^2 + 3a) \cos x + 8a^2 + 8a - 48 = 0$ имеет хотя бы один корень.

4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $2a^2 \cos 2x + 4a^2 \cos x - 4a \cos x - 9 \cos^2 x + 3a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. При каких значениях a уравнения $\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0$ и $(a + 3) \sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 4x - (a + 4) \sin 2x = 0$ равносильны?

6. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $(4 \cos x - 3 - a) \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{a^2 - 4 \sin^4 x} = \cos^2 x$ имеет решения.

Вариант 1

1. При каких значениях a уравнение $8\sin x + 2\cos 2x + a^2 - 4a - 2 = 0$ не имеет решений?

2. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sin^4 x - 2\cos^2 x + a + 5 = 0$ имеет решение.

3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(a+2)\cos^2 x - 2(a^2 + 2a)\cos x + 10a^2 - 5a - 50 = 0$ имеет хотя бы один корень.

4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $9a^2 \cos^2 x - 6a(a+1)\cos x + 2a - 2\cos 2x - 1 + a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

5. При каких значениях a уравнения $\sin x = 2\sin^2 x$ и $\sin 3x = (a+1)\sin x - 2(a-1)\sin^2 x$ равносильны?

Вариант 2

1. При каких значениях a уравнение $\cos 2x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

2. При каких значениях a уравнение $\cos 2x - 2\cos x - 2a^2 + 2a + 1 = 0$ не имеет решений?

3. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 2a$ имеет хотя бы один корень.

4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $2a^2 \cos 2x + 4a^2 \cos x + 3a^2 - 4a \cos x - 2a + \sin^2 x = 0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{a^2 - 9\cos^4 x} = \sin^2 x$ имеет решение.

▪ **Ответы (тест)** 2. Уравнения, сводящиеся к квадратным

	1.	2.	3.	4.	5.
Вар.1	$(-\infty; -2);$ $(6; \infty)$	$[-6; -3]$	$\{-2\} \cup [2; 3]$	$-1 \leq a \leq \frac{1}{4}$	$(-\infty; 0); \{2\};$ $\{3\}; (4; \infty)$
Вар.2	$[0; 2]$	$(-\infty; -1);$ $(2; \infty)$	$[-2; 2, 5]$	$\frac{1}{4} \leq a \leq 1$	$\frac{3}{\sqrt{10}} \leq a \leq 3$

3. Дополнительные условия на корни

▪ **Примеры**

1. При каких значениях a уравнение $2\sin 2x - \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \cdot \cos x - 2\sin x$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

2. При каких значениях a система $\begin{cases} (\operatorname{tg}x - \sqrt{3})(x - a) = 0 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$ имеет только одно решение?

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(2x + a + 1 + \operatorname{tg}x)^2 = (2x + a - 1 - \operatorname{tg}x)^2$ имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Найти все значения a , при которых среди корней уравнения $\sin 2x + 6a \cos x - \sin x - 3a = 0$ найдутся два, удаленные друг от друга на расстояние $\frac{3\pi}{2}$?

▪ **Тест** 3. Дополнительные условия на корни

1. При каких значениях a уравнение $2\sin 2x + \sqrt{a} = 2\cos x + 2\sqrt{a} \sin x$ имеет единственное решение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

2. При каких значениях a система $\begin{cases} (\operatorname{ctg}x - 1)(x + a) = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ имеет только одно решение?

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(2x + a + 1 - \operatorname{tg}x)^2 = (2x + a - 1 + \operatorname{tg}x)^2$ имеет единственное решение на отрезке $[0; \pi]$.

▪ **Ответы (тест)** 3. Дополнительные условия на корни

№1.	№2.	№3.
$\{3\} \cup (4; \infty)$	$(-\infty; -1] \cup \left\{-\frac{\pi}{4}; 0\right\} \cup [1; \infty)$	$a < -2\pi, a = -\pi, a = -\frac{\pi}{2}, a > 0$

4. Графический способ решения уравнений

▪ **Примеры**

- Если $a > 0$, $\beta \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos \beta = a^2 - 3,5$, то при каких a выполняется равенство?

- При каких $a > 0$ выполняется равенство $\operatorname{ctg} \beta = 10 - a^2$, где $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- Найдите все значения a , при которых уравнение $(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$ имеет на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

- Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sin \sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$ имеет ровно два решения.

Вариант 1

1. Если $\sin \alpha = b - 2, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$, то чему принадлежит b ?

2. При каких $a < 0$ выполняется равенство $\operatorname{tg} \alpha = a^2 - 8$, где $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a - 2}{a + 1}$ имеет ровно два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sin 2\sqrt{\pi ax - x^2} - \sin \sqrt{\pi ax - x^2} = 0$ имеет ровно два решения.

Вариант 2

1. Если $\cos \alpha = b - 2, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$, то чему принадлежит b ?

2. Если $\alpha < 0, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ и $\sin \beta = 4,5 - \alpha^2$, то при каких α выполняется равенство?

3. (ЕГЭ-2014) Найдите все значения a , при которых уравнение $(\operatorname{tg} x + 5)^2 - (a^2 + a + 6)(\operatorname{tg} x + 5) + a^2(a + 6) = 0$ имеет на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sin \sqrt{\pi ax - x^2} + \cos 2\sqrt{\pi ax - x^2} = 0$ имеет ровно два решения.

▪ **Ответы (тест)** 4. Графический способ решения уравнений

	1.	2.	3.	4.
Вар.1	$(1,5;2,5)$	$a < -3$	$(-7;-2,5) \cup \{-0,25\}$	$\left(-\frac{2}{3};0\right) \cup \left(0;\frac{2}{3}\right)$
Вар.2	$(2,5;3]$	$\left[-\frac{3}{\sqrt{2}};-2\right]$	$(-\sqrt{6};-2) \cup (-2;-1) \cup \{4\}$	$-\frac{7}{3} < a < -1; 1 < a < \frac{7}{3}$

5. Комбинированные уравнения

▪ **Примеры**

1. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3} \sin(2^{2x-x^2}) = a + 2 \sin^2(2^{2x-x^2-1})$ имеет хотя бы одно решение.

2. При каких значениях параметра a уравнение $(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2 \sin x - a| = 2 \cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x-a} \cdot \sin x = \sqrt{x-a} \cdot \cos x$ имеет единственное решение на отрезке $[0; \pi]$.

6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\operatorname{tg}(\pi x) \cdot \ln(x+a) = \ln(x+a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 1]$.

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $6 \log_4 \sin x + a \log_4 \sin x - a^2 + 7a - 10 = 0$ имеет хотя бы одно решение.
-
2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{7x - x^2 - 6} \left((8a - 15) \sin \frac{\pi x}{6} - 6 \cos \frac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9 \right) = 0$ имеет ровно пять решений.
-
3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2 \sin x + a| = a - 2 \cos x - \sin x$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.
-
4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(x^3 - 3x^2 - 9x + 3 - 0,5a) \cdot (2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x - 4 \sin^2 x - 1 - a) = 0$ имеет ровно три различных решения.
-
5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x-a} \cdot \sin x = -\sqrt{x-a} \cdot \cos x$ имеет единственное решение на отрезке $[0; \pi]$.
-
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\operatorname{tg}(\pi x) \cdot \ln(2x+a) = \ln(2x+a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 1]$.

▪ **Ответы (тест)** **5. Комбинированные уравнения**

№1.	№2.	№3.	№4.	№5.	№6.
$(-\infty; -6) \cup [2; 5]$	$\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$	$(-48; -\sqrt{10} - 2)$ $\cup (\sqrt{10} - 2; 16)$	$a < 0$ $\frac{3\pi}{4} \leq a \leq \pi$	$-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ $a = 0, a = \frac{1}{2},$ $a > 1$