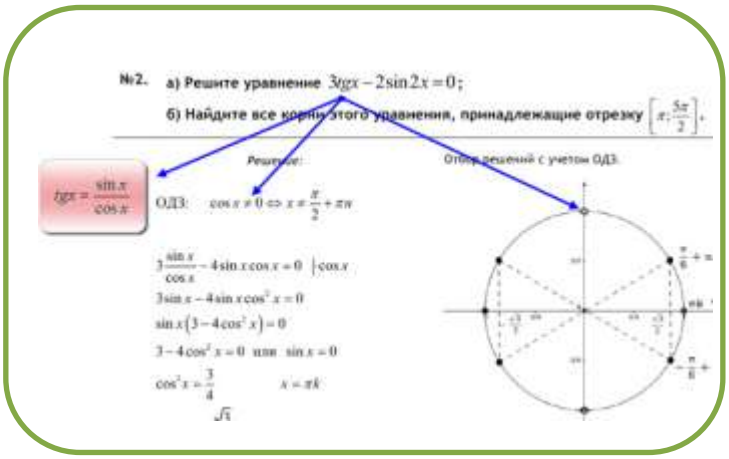


- Тематические курсы/Уравнения/Тригонометрические /Учет ОДЗ в уравнениях
- **ЕГЭ Профиль/*Задание №13/*** Тригонометрические уравнения
- Алгебра 10 / Тригонометрические уравнения/Учет ОДЗ в уравнениях

Учет ОДЗ в тригонометрических уравнениях

1. Переменная в знаменателе

2. Переменная под знаком квадратного корня

3. Переменная под знаком квадратного корня и в знаменателе

4. Учет ОДЗ переменной в тригонометрических уравнениях.

Тренировочные работы

1. Переменная в знаменателе

▪ *Примеры*

№1. а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x}{2\cos x+1}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\dfrac{ctg^2 x-3}{2\sin x-1}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№3. а) Решите уравнение $3tgx-2\sin 2x=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

№4. Решите уравнение $\dfrac{8\sin^2 x-10\sin x-7}{1+\sqrt{3}tgx}=0$.

№5. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2}\cos 2x+\left(2-\sqrt{2}\right)\cos x+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\sin x-1}=0$.

№6. а) Решите уравнение $ctg2x\cdot\cos 3x+\sin 3x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

№7. Решите уравнение $\dfrac{4tg^2 x-3tgx}{5\sin^2 x+3\sin x}=0$.

№8. а) Решите уравнение $\dfrac{3\cos 2x-5\sqrt{2}\cos x+5}{9\sin^2 x-7}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\dfrac{11\pi}{2}\right]$.

№9. а) Решите уравнение $\dfrac{17\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-8\cos\left(3\pi+x\right)}{17\sin\left(5\pi-x\right)-15}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№10.

а) Решите уравнение $\dfrac{29\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-21\sin\left(x-\pi\right)}{29\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-20}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};0\right]$.

№11. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin^4 x-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2 x}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)-2}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;4\pi\right]$.

№12. а) Решите уравнение $\dfrac{4\sin^3 x-2\sin x}{\sin\left(2x-\pi\right)}=1$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

---

2. Решите уравнение $\frac{4\cos^2 x-8\cos x-5}{tgx+\sqrt{3}}=0$.

---

3. а) Решите уравнение $\frac{3tg^2x-1}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

---

4. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos(\pi-x)}=\sqrt{2}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

---

5. а) Решите уравнение $tgx-\sin 2x=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

---

6. Решите уравнение $\frac{2\cos 2x+2\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x+\sqrt{3}-2}{2\cos x-1}=0$.

---

7. Решите уравнение $\frac{3ctg^2x+4ctgx}{5\cos^2 x-4\cos x}=0$.

---

8. а) Решите уравнение $\frac{5\cos 2x+3\sqrt{2}\cos x+3}{25\sin^2 x-23}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

---

9. а) Решите уравнение $\frac{13\sin^2(2\pi-x)-12\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{13\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-5}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№10.

а) Решите уравнение $\dfrac{\cos^4 x+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)-\sin^2 x}{2\cos^2\left(-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{4}\right)-5\sin\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right)-2}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi;4\pi]$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}=\sqrt{3}$;

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

---

2. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1}{tgx-\sqrt{3}}=0$;

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

---

3. а) Решите уравнение $\dfrac{3ctg^2x-1}{2\cos x+1}=0$;

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

---

4. а) Решить уравнение $\dfrac{\cos 2x\cdot\sin 3x-\sin x}{\sin 2x}=-\cos 3x$;

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

---

5. а) Решите уравнение $\dfrac{2}{tg^2x+1}=\sin 2x$;

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

---

6. а) Решите уравнение $\dfrac{5tgx-12}{13\cos x-5}=0$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\dfrac{11\pi}{2}\right]$.

---

7. а) Решите уравнение $\cos x-\sin x\cdot tg\dfrac{x}{2}=-1$;

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{9\pi}{4}\right]$.

8. а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos 2x-3\cos x+1}{25\sin^2 x-9}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9\pi}{2};5\pi\right]$.

---

9. а) Решите уравнение $\dfrac{25\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)-24\cos(\pi-x)}{25\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+x\right)-7}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

№10. а) Решите уравнение $\dfrac{4\cos^3 x-6\cos x}{\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)}=3$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};4\pi\right]$.

Вариант 3

1. а) Решите уравнение $tgx-2\sin 2x=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

---

2. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x+\sqrt{2}\cos x+1}{tgx-1}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

---

3. а) Решите уравнение $\dfrac{3tg^2x-1}{2\sin x+1}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

---

4. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 5x\cdot\sin 3x+\sin 2x}{\cos 3x}=-\sin 5x$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

---

5. Решите уравнение $\dfrac{\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x}{tg2x+\sqrt{3}}=0$;

6. а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos x+4}{4tgx-3}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

---

7. Решите уравнение $\dfrac{2tg^2x-tgx}{\sqrt{5}\sin x+1}=0$.

---

8. а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

---

9. а) Решите уравнение $\dfrac{5\sin^2(\pi+xx)+3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-4}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

▪ *Ответы (тест)* Переменная в знаменателе

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1.	а) $\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$ б) $2\pi,\ \dfrac{17\pi}{6},\ 3\pi$	а) $\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$ б) $-\dfrac{7\pi}{6}$	а) $\pi n, \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n$ б) $-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3},\ 0,\ \dfrac{\pi}{3}$
2.	$-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$	а) $\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $2\pi,\ \dfrac{8\pi}{3},\ 3\pi$	а) $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$ б) $\dfrac{11\pi}{4}$
3.	а) $\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{11\pi}{6}$ и $\dfrac{13\pi}{6}$.	а) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$ и $-\dfrac{5\pi}{3}$.	а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{6}$ и $-\dfrac{7\pi}{6}$.
4.	а) $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$ б) $-\dfrac{11\pi}{4}, -\dfrac{9\pi}{4}$	а) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi m}{3}, m\in Z$; б) $\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6}$.	а) $\dfrac{\pi n}{5}$ б) $\pm\dfrac{\pi}{5},\ 0,\ \dfrac{2\pi}{5}$
5.	а) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ \pi n$ б) $-\dfrac{\pi}{4},\ 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \pi$	а) $\dfrac{\pi}{4}+\pi k$ б) $-\dfrac{7\pi}{4},\ -\dfrac{3\pi}{4}$.	$\dfrac{\pi}{2}+\pi m$
6.	$\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,$ $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$	а) $arctg\dfrac{12}{5}+\pi+2\pi k$ б) $5\pi+arctg\dfrac{12}{5}$	а) $\pi-\arccos\dfrac{4}{5}+2\pi k$ б) $-3\pi-\arccos\dfrac{4}{5}$

7.	$\pi - arcctg\frac{4}{3} + 2\pi k$	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$ б) $\frac{3\pi}{2}$	$arctg\frac{1}{2} + 2\pi k,\ \pi n$
8.	а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ б) $\frac{13\pi}{4}$	а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{14\pi}{3}$.	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$.
9.	а) $\pi k,\ \arcsin\frac{12}{13} + 2\pi n$ б) $2\pi,\ 2\pi + \arcsin\frac{12}{13},\ 3\pi$	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \pi - \arccos\frac{24}{25} + 2\pi n$ б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$	а) $\pi k,\ \pi - \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi n$ б) $-3\pi - \arcsin\frac{3}{5},\ -3\pi,\ -2\pi$
10.	а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $\frac{3\pi}{2} + 4\pi p,\ p \in \mathbb{Z}$ б) $\pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ 4\pi$	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6},\ \frac{19\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6}$	

2. Переменная под знаком квадратного корня

- ***Примеры***

№1. Решите уравнение $(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)=0$.

№2. Решите уравнение $(\sin 2x-\sin x)\left(\sqrt{2}+\sqrt{-2ctgx}\right)=0$.

№3. а) Решите уравнение $\sqrt{tgx-1}(3\cos x+\cos 2x+1)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

№4. Решите уравнение $\sqrt{9x-20-x^2}\left(\cos 2x-5\sqrt{3}\sin x-7\right)=0$.

№5. а) Решите уравнение $\sqrt{\sin x-\cos x}(\cos x+\cos 2x)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{\pi^2-x^2}(5-7\cos x+7\sin x-3\sin 2x)=0$.

№7. а) Решите уравнение $\left(4\sin^2 x-1\right)\sqrt{x^2-64\pi^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[25;30]$.

№8. а) Решите уравнение $\left(4\sin^2 x-1\right)\sqrt{64\pi^2-x^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-30;-20]$.

Вариант 1

№1. Решите уравнение $(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$.

№2. Решите уравнение $(\sin 2x+\cos x)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3tgx}\right)=0$.

№3. Решите уравнение $\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)\left(tg^2x-tgx-2\right)=0$.

№4. Решите уравнение $\left(4\sin^2 x+12\sin x+5\right)\cdot\sqrt{-17\cos x}=0$.

№5. Решите уравнение $\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}\,(tg2x-1)=0$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{9x-8-x^2}\left(\cos 2x+3\sqrt{3}\sin x-4\right)=0$.

№7. а) Решите уравнение $\left(4\sin^2 x-3\right)\sqrt{x^2-36\pi^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[15;20]$.

Вариант 2

№1. Решите уравнение $\left(\sqrt{-tgx}-1\right)\left(2\sin^2 x+5\sin x-3\right)=0$.

№2. Решите уравнение $\left(\cos x-1\right)\left(tgx+\sqrt{3}\right)\sqrt{\cos x}=0$.

№3. Решите уравнение $\left(\sqrt{3}tg^2x+tgx\right)\cdot\sqrt{-2\cos x}=0$.

№4. Решите уравнение $\sqrt{\pi^2-x^2}\left(4\sin 2x+6-9\sin x-9\cos x\right)=0$.

№5. а) Решите уравнение $\sqrt{ctgx}\left(2\cos^2 x-\cos x-1\right)=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{4},\frac{7\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{\cos x-\sin x}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\left(4\sin^2 x-3\right)\sqrt{36\pi^2-x^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-20;-15\right]$.

Вариант 3

№1. Решите уравнение $\left(\sqrt{-\cos x}-1\right)\left(2\sin^2 x-5\sin x-3\right)=0$.

№2. Решите уравнение $\left(\sqrt{-tgx}-\sqrt[4]{3}\right)\left(2\cos^2 x+3\cos x-2\right)=0$.

№3. Решите уравнение $\left(tg^2x-tgx\right)\cdot\sqrt{8\cos x}=0$.

№4. Решите уравнение $\left(6\sin^2 x+5\sin x-4\right)\cdot\sqrt{-7\operatorname{ctg} x}=0$.

№5. а) Решите уравнение $\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{\cos x+\sin x}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0,\pi\right]$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{25-x^2}\cdot\cos x=0$.

№7. а) Решите уравнение $\left(4\cos^2 x-1\right)\sqrt{47\pi^2-x^2}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[20;25\right]$.

Ответы (тест) 2. Переменная под знаком квадратного корня

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
№1.	$\frac{5\pi}{6}+2\pi k$	$-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k$	$\pi+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k$
№2.	$-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$	$2\pi k, -\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$-\frac{\pi}{3}+\pi k$
№3.	$-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $\pi+arctg2+2\pi k$	$\pi+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k$	$2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi k$
№4.	$\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k$	$\pm\pi,\ \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi n$
№5.	$\frac{\pi}{8}+\pi n$	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $\frac{5\pi}{2},\ \frac{10\pi}{3},\ \frac{7\pi}{2}$	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ 1$ б) $1;\ \frac{3\pi}{4}$
№6.	$1,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ 8$	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ -1$ б) $-1,\ \frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2};\ \pm 5$
№7.	а) $\pm 6\pi,\ \frac{16\pi}{3}+\pi n,\ \frac{17\pi}{3}+\pi n,$ $-\frac{17\pi}{3}-\pi n,$ $-\frac{16\pi}{3}-\pi n,\ n\in\mathbb{N};$ б) $6\pi,\ \frac{19\pi}{3}.$	а) $\pm 6\pi,\ -\frac{17\pi}{3}+\pi n,$ $-\frac{16\pi}{3}+\pi n,\ n\in\{0,...,11\};$ б) $-6\pi,\ -\frac{17\pi}{3},\ -\frac{16\pi}{3}.$	а) $\pm 7\pi,\ -\frac{20\pi}{3}+\pi n,$ $-\frac{19\pi}{3}+\pi n,\ n\in\{0,...,13\};$ б) $7\pi,\ \frac{20\pi}{3}.$

3. Переменная под знаком квадратного корня и в знаменателе

- ***Примеры***

№1. Решите уравнение $\dfrac{4\cos^2 x+8\sin x-7}{\sqrt{-tgx}}=0$.

№2. Решите уравнение $\dfrac{4\cos 2x-9\sin x-4}{\sqrt{-\cos x}}=0$.

№3. Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x-9\cos x+5}{\sqrt{3\sin x-1}}=0$.

№4. Решите уравнение $\dfrac{\cos 3x+\sin 2x-\cos x}{\sqrt{-1+4x-x^2}}=0$.

№5. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2\pi-x}{x}}\left(\sqrt{2}\sin^2 x-\cos x\right)=0$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{\sin x\cdot\cos x}\left(\dfrac{1}{tg2x}+1\right)=0$.

- ***Ответы (тест)*** 3. Переменная под знаком квадратного корня и в знаменателе

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
№1.	$\pi+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k$	$-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n$
№2.	$-\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$
№3.	$-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n$	$2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi k$	$\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$
№4.	$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, 3$	$\frac{5\pi}{6}+2\pi k$
№5.	$-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ 0$	585°	$-1,\ -\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{6}$
№6.	$-\frac{\pi}{6}+2\pi k, -\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k=1,2,3...$		

4. Учет ОДЗ переменной в тригонометрических уравнениях. Тренировочные работы

▪ *Примеры*

№1. а) Решите уравнение $\left(tg^2x-1\right)\sqrt{13\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\frac{2\cos x+1}{tgx-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\frac{13\sin^2 x-5\sin x}{13\cos x+12}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{16-x^2}\cdot\sin x=0$.

№7. а) Решите уравнение $\frac{3\cos 2x+7\sin x-5}{9\cos^2 x-5}=0$.

б) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$

Вариант 1

№1. а) Решите уравнение $\left(tg^2x-3\right)\sqrt{11\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\sqrt{5tgx}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}tgx+1}{2\sin x-1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\frac{5\sin^2 x-3\sin x}{5\cos x+4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{-5\sin x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№6. а) Решите уравнение $2x\cos x-8\cos x+x-4=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\frac{5\cos 2x+9\sin x-7}{25\cos^2 x-21}=0$.

б) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$

Вариант 2

№1. а) Решите уравнение $\left(3tg^2x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№2 а) Решите уравнение $\frac{5\cos x+3}{5\sin x-4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;2\pi\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x-\sqrt{2}\cos x}{tgx+1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{17\sin x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $2\sin x+tgx=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\left(1-3ctg^2x\right)\sqrt{7\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

- ***Ответы (тест)*** 4. ЕГЭ Задание №13. Тренировочные работы

	Вар.1	Вар.2
№1.	*а)* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; *б)* $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$	*а)* $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; *б)* $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{6}$.
№2.	*а)* πn, $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; *б)* π, 2π, $\frac{13\pi}{6}$	*а)* $\pi+\arccos\frac{3}{5}+2\pi k$; *б)* $\pi+\arccos\frac{3}{5}$.
№3.	*а)* $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$; *б)* $\frac{35\pi}{6}$	*а)* $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; *б)* $\frac{17\pi}{4}$.
№4.	*а)* πk, $\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n$; *б)* -3π, -2π	*а)* $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; *б)* $\frac{11\pi}{4}$.
№5.	*а)* $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$; *б)* $\frac{7\pi}{4}$	*а)* πk, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; *б)* -2π, $-\frac{4\pi}{3}$, $-\pi$.
№6.	*а)* 4; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; *б)* $\frac{2\pi}{3}$	*а)* $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; *б)* $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{4\pi}{3}$.
№7.	*а)* $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; *б)* $-\frac{23\pi}{6}$	

5. Иррациональные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим

▪ *Примеры*

№1. а) Решите уравнение $\cos x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\sin x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}(\cos x + 1)} = 0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\sqrt{2\sin^2 x + 10\sin x + 2} = \sqrt{\sin x + 7}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\sqrt{4\cos^2 x + 9\cos x + 6} = \sqrt{\cos x + 11}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -3\pi;\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\sqrt{2\cos^3 x - \sin^2 x - 2\cos x - \sin x} = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2};\right]$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{1 + 8\sin 2x \cdot \cos^2 2x} = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

▪ *Тест* 5. Иррациональные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим

№1. а) Решите уравнение $\sin x=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\sin x+\sqrt{\frac{3}{2}(1-\cos x)}=0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};-5\pi;\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\sqrt{2\sin^2 x-2\sin x+7}=\sqrt{\sin x+9}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\sqrt{2\cos^2 x-4\cos x+3}=\sqrt{\cos x+6}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi;\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\sqrt{4\sin^3 x-4\cos^2 x-\cos x-\sin x+3}=\sqrt{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

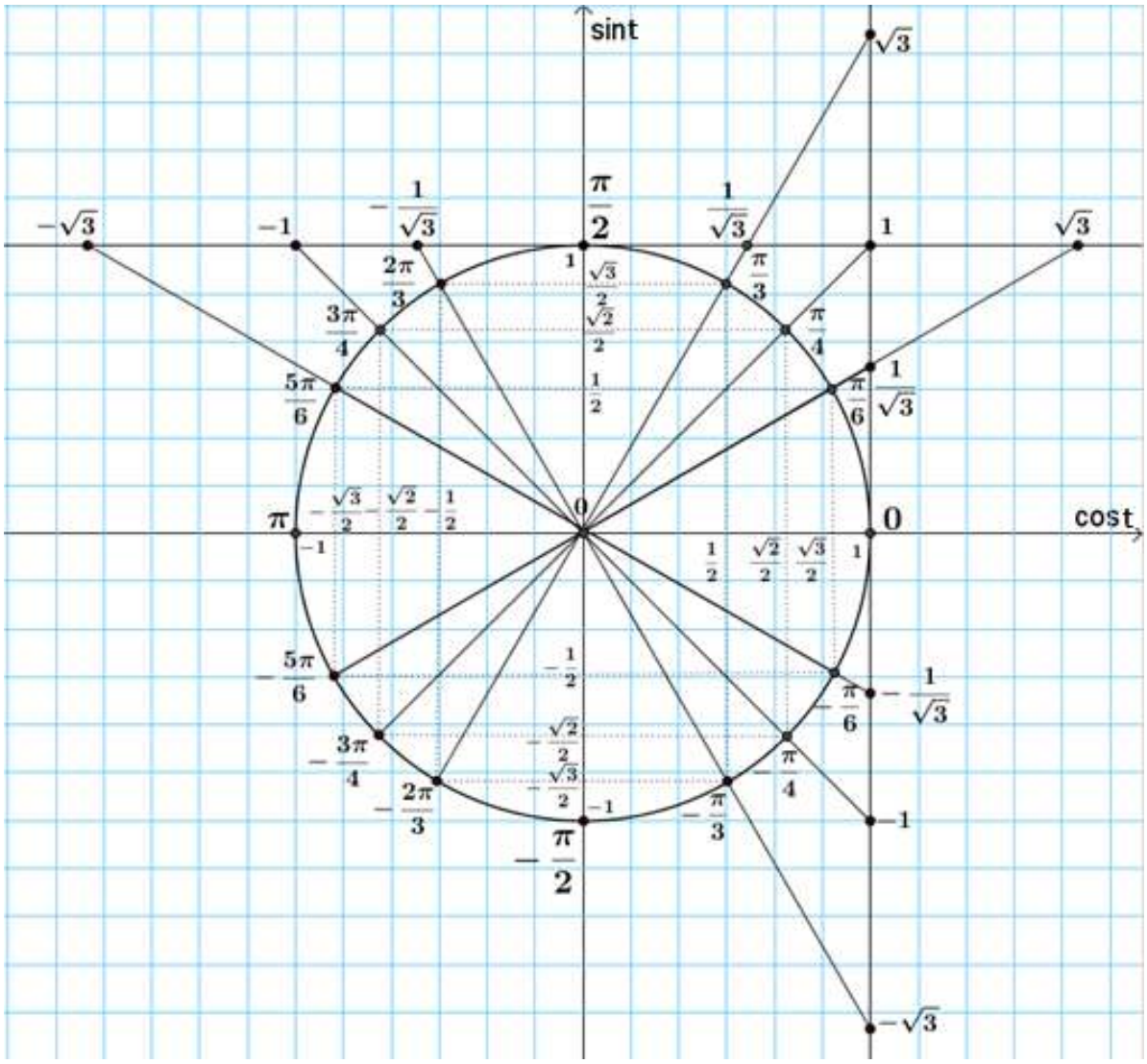
б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

▪ *Ответы (тест)* 5. Иррациональные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим

№1	№2	№3	№4
а) $2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $n,k\in\mathbb{Z}$; *б)* 2π, $\frac{8\pi}{3}$.	*а)* $2\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$; *б)* -6π, $-\frac{19\pi}{3}$.	*а)* $-\frac{\pi}{6}+2\pi k;-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n,k\in\mathbb{Z}$; *б)* $-\frac{17\pi}{6}$.	*а)* $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{14\pi}{3}$.

№5
а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n,k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{29\pi}{6}$, $\frac{31\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{2}$.

✓ *Тригонометрический круг*



✓ *Основные тригонометрические формулы*

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ **2.** $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ **3.** $ctg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ **4.** $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

5. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$ **6.** $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$

7. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ **8.** $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

9. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ **10.** $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

11. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ **12.** $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

13. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

14. $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ **15.** $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

16. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ **17.** $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

18. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **19.** $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

20. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ **21.** $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

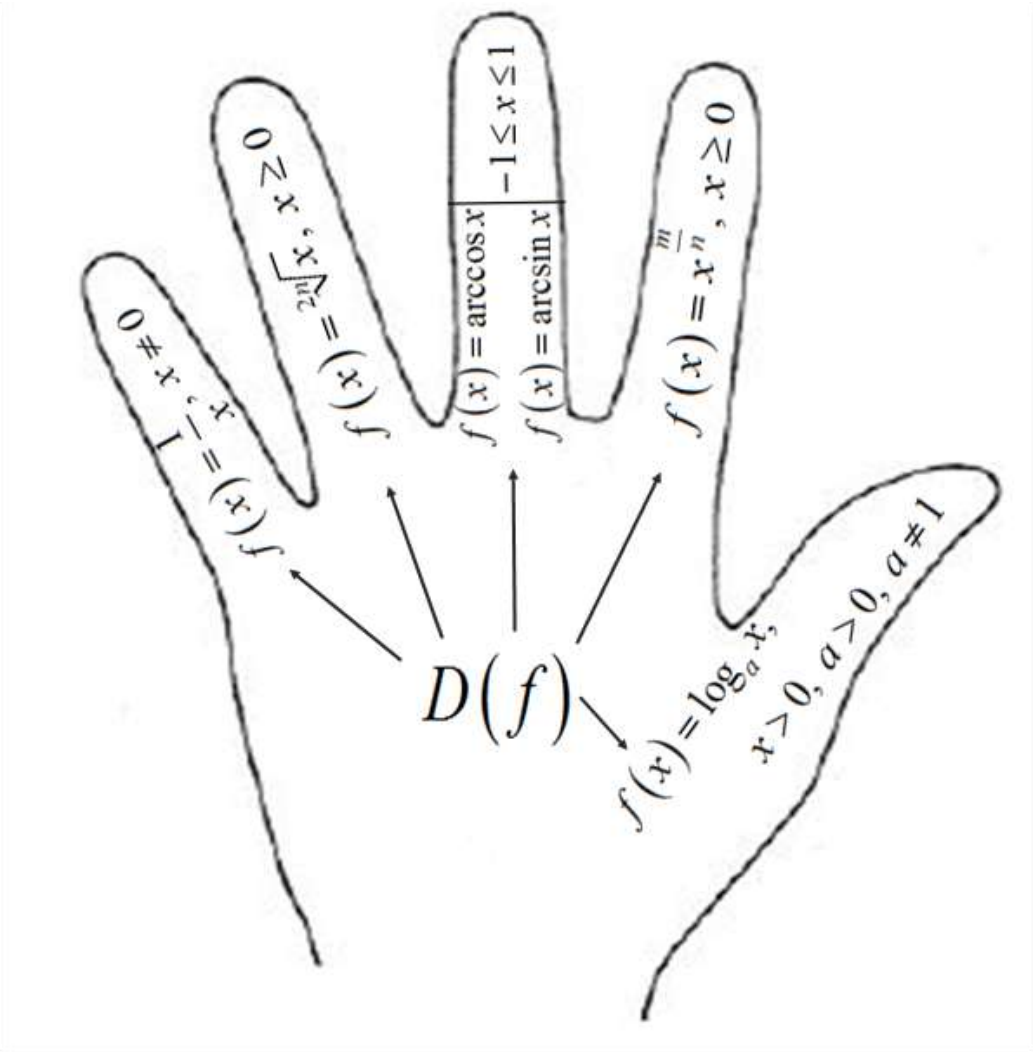
22. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$ **23.** $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

24. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$

25. $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ **26.** $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ **27.** $\left|tg\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

28. $\sin 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ **29.** $\cos 2\alpha=\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

30. $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),\ \sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

<u>Определение:</u> ***Областью определения уравнения*** $f(x)=g(x)$ ***или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения*** $f(x)$ ***и*** $g(x)$.

- ✓ *Наиболее часто встречающиеся действия, приводящие к расширению области определения уравнения:*
  1) Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину;
  2) Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени;
  3) Освобождение в процессе решения от знаков логарифма
- ✓ Ограничений для переменной, входящей в выражение не так много – их всего пять и можно запомнить, разместив на пальцах ладони.