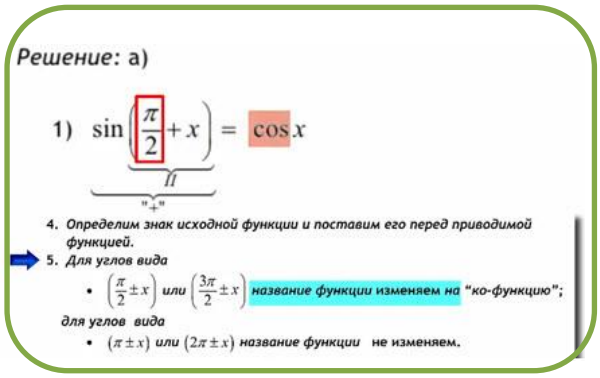


Тригонометрические уравнения

Формулы приведения в тригонометрических уравнениях

1. Формулы приведения.....2

2. Некоторые приемы отбора корней....9

3. Однородные уравнения.....13

4. Задание №13 ЕГЭ Профиль.....16

Справочные материалы.....21

1. Формулы приведения

▪ *Примеры*

№1. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^2 x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{3}\sin x$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;-2\pi]$.

№3. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}=2$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№4. Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)=0$.

№5. а) Решите уравнение $4\sqrt{3}\sin^3 x=\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 4x\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 1

№1. а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}+2=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $2\cos^2 x=\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}tgx$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

№4. Решите уравнение $3\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=7\sin(4\pi+x)$.

№5. Решите уравнение $2-\cos 2x+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

Вариант 2

№1. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}+2=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{3}\cos x$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-3\pi\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=tgx$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos(\pi+x)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

№5. Решите уравнение $tgx=5tg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-4$.

Вариант 3

№1. а) Решите уравнение $1+\sin\left(x-\frac{9\pi}{2}\right)=\sin^2 x$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi;3\pi]$.

№2. а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi+2x)=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;-2\pi]$.

№4. а) Решите уравнение $2\sin^2(\pi+x)+\sqrt{2}\sin x-10\sin x-5\sqrt{2}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

№5. Решите уравнение $tg(x-\pi)-3ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2$.

Вариант 4

№1. а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $2 - 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $0,25 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $ctg^2 x + 2\sqrt{3}ctgx + 3\sin^2 x = -3\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $2\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi - x) = \sqrt{3}\sin x$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 5 (по материалам Сборников по подготовке к ЕГЭ-2026)

№1. а) Решите уравнение $2\cos^2 x+\sin(5\pi-x)+1=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $4\sin^2 x+8\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-7=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№3. а) Решите уравнение $4\cos^2 x+8\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{9\pi}{2}\right)-13=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $1-\cos(4\pi-x)-\sin^2 x=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{31\pi}{4};-\frac{25\pi}{4}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\sin^2 x+\frac{5}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)+2=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{15\pi}{2};9\pi\right]$.

№6. а) Решите уравнение $4\sqrt{3}\cos^3 x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\cos 2x\cdot\sin 4x-\cos 4x\cdot\sin\frac{5\pi}{6}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;-2\pi]$.

▪ *Ответы (тест)* 1. Формулы приведения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$\pi+2\pi k;$ а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ б) $\frac{8\pi}{3},\ 3\pi$	$\frac{\pi}{2}+\pi k,$ а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ б) $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6}$	$\pi k;$ а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ б) $-3\pi,\ -\frac{17\pi}{6},\ -2\pi$	$\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k,$ $\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k$	$\frac{\pi}{4}+2\pi k,$ $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$
Вар.2	$-\frac{\pi}{6}+2\pi k,$ а) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ б) $\frac{19\pi}{6},\ \frac{7\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\pi k,$ а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ б) $-\frac{11\pi}{3},-\frac{7\pi}{2},-\frac{10\pi}{3}$	$\pi k;$ а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ б) $-2\pi,\ -\frac{5\pi}{3},\ -\pi$	$\frac{\pi}{2}+\pi k,$ а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n,$ $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$ б) $\frac{3\pi}{2},\ \frac{9\pi}{4},\ \frac{5\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $-arctg5+\pi k$
Вар.3	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi n$ б) $\frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2}$	а) $\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ б) $3\pi,\ \frac{10\pi}{3},\ 4\pi$	а $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n$ $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ б) $-\frac{5\pi}{2}$	а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,$ $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ б) $\frac{13\pi}{4},\ \frac{15\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}+\pi k$
Вар.4	а) $\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,$ $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ б) $-2\pi,-\frac{11\pi}{6},$ $-\frac{7\pi}{6},-\pi$	а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $-\frac{8\pi}{3}$	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,$ $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ б) $-\frac{29\pi}{6},-\frac{25\pi}{6}$	а) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$ б) $-\frac{31\pi}{6},-\frac{25\pi}{6}$	а) $\pi k,$ $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ б) $-\pi,-\frac{5\pi}{6},\ 0$
Вар.5	*а)* $-\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ *б)* $\frac{11\pi}{2}$	*а)* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;$ *б)* $-\frac{7\pi}{3}.$	*а)* $\frac{\pi}{3}+2\pi n,$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $\frac{13\pi}{3}.$	*а)* $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi n;;$ *б)* $-\frac{15\pi}{2},-\frac{13\pi}{2}$	*а)* $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n;$ *б)* $\frac{35\pi}{4}$

№6.	№7.
а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,-\frac{\pi}{3}+2\pi n,$ $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; *б)* $-\frac{7\pi}{2},\ -\frac{8\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{2}$	*а)* $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\frac{\pi}{12}+\pi n,\frac{5\pi}{12}+\pi n;$ *б)* $-\frac{35\pi}{12},-\frac{23\pi}{8},-\frac{21\pi}{8},-\frac{31\pi}{12},-\frac{19\pi}{8},-\frac{17\pi}{8}$

2. Некоторые приемы отбора корней

- ***Примеры***

№1. а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\cdot\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-8x\right)+\cos 6x=1$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $1+2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+3\cdot\cos^2 2x=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

№4. а) Решите уравнение $\sin^2 40^\circ\cdot\sin x=\frac{arctg\sqrt{3}}{\arccos(-0,5)}+\cos^2 140^\circ\cdot\cos\left(270^\circ-x\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};3\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4}\cos\left(8x-\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{8\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)-\sin(\pi+x)=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-7\pi;-4\pi]$.

Вариант 1

№1. а) Решите уравнение $\cos x+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+1=0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\cos\left(8\left(x-\pi\right)\right)=3+4\sin\left(4\left(x+\pi\right)\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\pi+2x\right)=0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;2\pi\right]$.

№5. Решите уравнение $\sin^2 50^\circ\cdot\cos x=\dfrac{arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}}{2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sin^2 40^\circ\cdot\sin\left(270^\circ-x\right)$.

№6. а) Решите уравнение $\cos 3x\cdot\sin 3x=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(12x+\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\sin x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[4\pi;\ 7\pi\right]$.

Вариант 2

№1. а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 5\cos\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sqrt{2}\sin x$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

№3. а) Решите уравнение $\sin\left(3x + \frac{7\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 6x\right) = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

№4. Решите уравнение $3 + 2\sin(3\pi - 2x) = tgx + tg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

№5. а) Решите уравнение $\cos^2 x + \sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 1$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + \sin(\pi - x) = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-9\pi; -6\pi]$.

№7. а) Решите уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[8\pi;\ 11\pi]$.

Ответы (тест) 2. Некоторые приемы отбора корней

	Вариант 1	Вариант 2
№1.	*а)* $\pi+2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+4\pi n$ *б)* $-3\pi,\ -\frac{11\pi}{3}$	*а)* $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, *б)* $-\frac{11\pi}{6},-\frac{7\pi}{6}$.
№2.	*а)* $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ *б)* $\frac{15\pi}{4}$	*а)* $\pi k;\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$ *б)* $-5\pi;-\frac{19\pi}{4};-4\pi$.
№3.	*а)* $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$ *б)* $\frac{7\pi}{24},\ \frac{11\pi}{24}$	*а)* $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3};\ \frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}$ *б)* $-\frac{\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{18}$.
№4.	*а)* $\frac{\pi k}{2},\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$ *б)* $\pi,\ \frac{13\pi}{12},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{23\pi}{12},\ 2\pi$	$\frac{\pi}{12}+\pi k,\ \frac{5\pi}{12}+\pi k$
№5.	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$	*а)* $\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n$; *б)* $-3\pi,-\frac{9\pi}{4},-2\pi$.
№6.	*а)* $\frac{\pi k}{6},\ \pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3};\ k\in\mathbb{Z}$; *б)* $-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{11\pi}{18},\ -\frac{5\pi}{18},\ -\frac{13\pi}{18},\ -\frac{7\pi}{18}$	*а)* $2\pi n,\ \pm\frac{4\pi}{3}+4\pi m,\ n,m\in\mathbb{Z}$; *б)* $-6\pi,\ -8\pi,\ -\frac{20\pi}{3}$
№7.	*а)* $2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{2}+4\pi n,\ \{k,n\}\in\mathbb{Z}$; *б)* $4\pi,\ \frac{9\pi}{2},\ 6\pi$.	*а)* $2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+4\pi n,\ \{k,n\}\in\mathbb{Z}$; *б)* $8\pi,\ \frac{25\pi}{3},\ 10\pi$.

3. Однородные уравнения

▪ *Примеры*

№1. а) Решите уравнение $\sin x+\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $5\sin^2 x-4\sin x\cos x-\cos^2 x=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

№3. Решите уравнение $2\cos^2 x+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(x-4\pi)+1=0$.

№4. а) Решите уравнение $\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№5. Решите уравнение $\sin^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$.

№6. а) Решите уравнение $\sin 2x+2\sqrt{3}\cos^2 x-6\sin x-6\sqrt{3}\cos x=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

№7. а) Решите уравнение $tgx+\sin x+\cos x=-1$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№8. а) Решите систему $\begin{cases}6\sin^2 x-3\sqrt{3}\left|\sin 2x\right|+4\cos^2 x=0\\ \left|tgx\right|\le 1\end{cases}$;

б) В ответе указать в градусах сумму решений на отрезке $[\pi;3\pi]$.

▪ *Тест* 3. Однородные уравнения

Вариант 1

№1. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

№3. Решите уравнение $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

№4. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $tgx - \sin x + \cos x = 1$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решить систему $\begin{cases} 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\left|\sin 2x\right| + 3\cos^2 x = 0 \\ \left|tgx\right| \le 1 \end{cases}$.

б) В ответе указать в градусах сумму решений на отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 2

№1. а) Решите уравнение $3\sin^2 x+5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;3\pi]$.

№2. Решите уравнение $3\cos^2 x=2\sin 2x-\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)$.

№3. а) Решите уравнение $\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x-6\cos x-6\sqrt{3}\sin x=0$;
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

№4. Решите уравнение $\left(1+4\sqrt{3}\right)\cos^2 x-\left(4-\sqrt{3}\right)\sin x\cdot\cos x=1$.

№5. Решите уравнение $\sin^3 3x-4\sin^2 3x\cos 3x+3\sin 3x\cos^2 3x=0$.

- ***Ответы (тест)*** 3. Однородные уравнения

	Вариант 1	Вариант 2
№1.	а) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$ б) $\frac{11\pi}{6},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{17\pi}{6}$	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ -arctg\frac{2}{3}+\pi n$ б) $\frac{11\pi}{4},\ 3\pi-arctg\frac{2}{3}$
№2.	а) $arctg\frac{1}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi k$ б) $\pi+arctg\frac{1}{3},\frac{5\pi}{4},\ 2\pi+arctg\frac{1}{3},\ \frac{9\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+\pi k,\ arctg3+\pi n$
№3.	$\frac{\pi}{4}+\pi k,\ arctg3+\pi n$	а) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) $-\frac{13\pi}{6}$
№4.	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{3}+\pi n$ б) $-\frac{5\pi}{2},-\frac{5\pi}{3},-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}+\pi n,\ -arctg4+\pi k$
№5.	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ 2\pi n,\ k\in\mathbb{Z}$ б) $-4\pi,\ -\frac{15\pi}{4},\ -\frac{11\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ \frac{1}{3}arctg3+\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi m}{3}$

№6.	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) 930	

4. Задание №13 ЕГЭ Профиль

- ***Примеры***

№1. а) Решите уравнение $2\cos^2 x+1=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}=\sqrt{2}$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\sin 2x+2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $2\cos 2x=4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $2\sin^3(\pi+x)=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x}+tgx+\sqrt{3}tg(\pi-x)-\sqrt{3}-1=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

- ***Тесты*** 4. Задание №13 ЕГЭ Профиль

Вариант 1

№1. а) Решите уравнение $2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+4=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $8\sin^2 x+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=9$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $2\cos^3(x-\pi)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};\frac{11\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $1+\sin(\pi+x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin 2x+\cos 2x=0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 2

№1. а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

№2. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}tgx + tg(2\pi - x) - \sqrt{3} - 1 = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $1 + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 3 ЕГЭ-2024

№1. а) Решите уравнение $\sin 2x - \sin(x-\pi) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + 4 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) = \sqrt{2}\sin x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

б) Укажите сумму корней этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos(\pi - x) = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $2\sin x + \cos^2 x = 2\sin^3 x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{3}\cos(x-\pi) + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№8. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{3}\sin(x+\pi) - 1 = 0$.

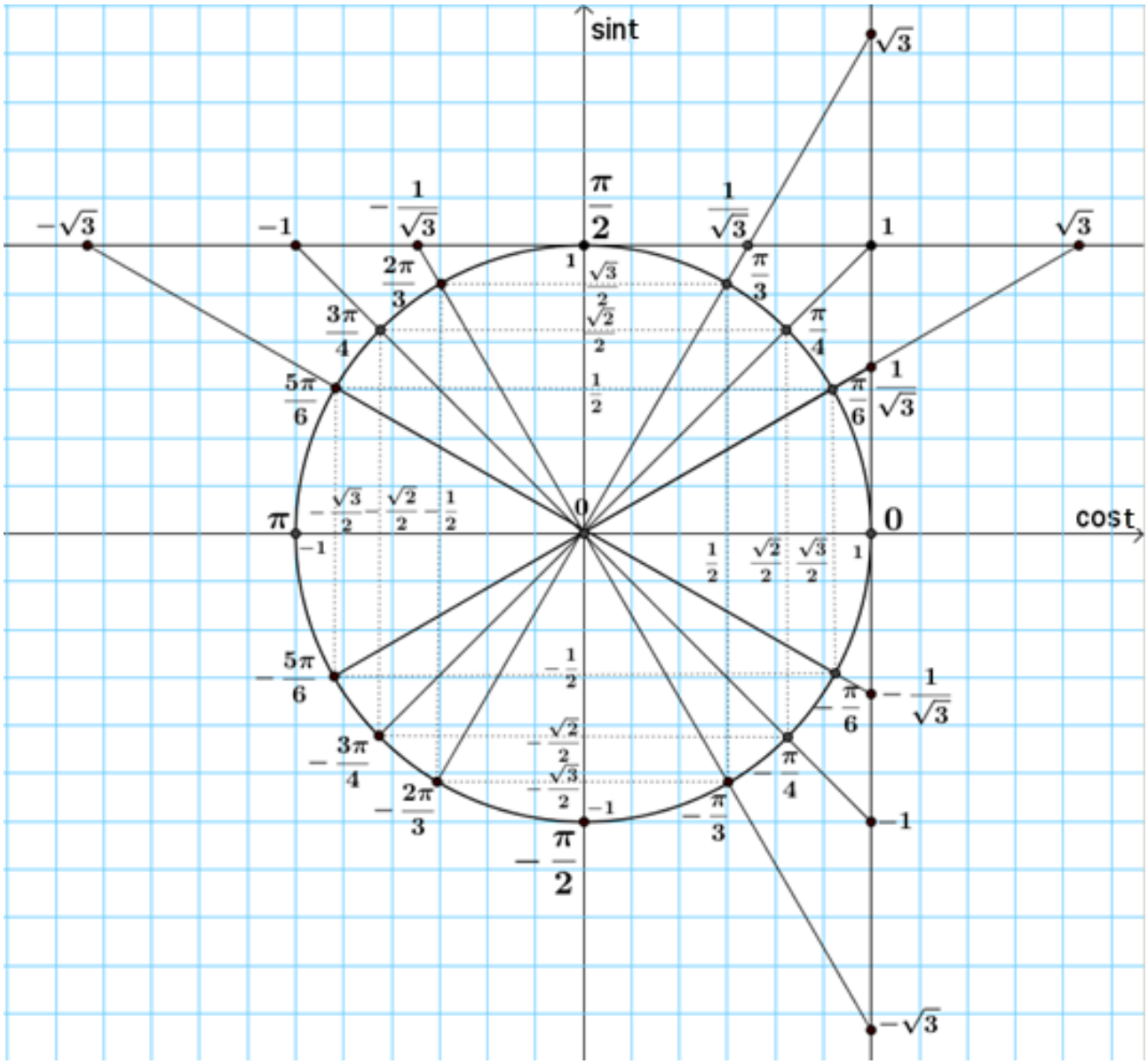
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

- ***Ответы (тесты)*** 4. Задание №13 ЕГЭ Профиль

	№1.	№2.	№3.	№4.	№5.	№6.
Вар.1	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ б) $-\frac{17\pi}{6}$	а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,$ $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $-\frac{7\pi}{3}$	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k;$ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}$	а) $\frac{\pi}{4}+2\pi k;$ $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ б) $\frac{9\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4}$	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,$ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ б) $\frac{9\pi}{2},\frac{19\pi}{4},$ $\frac{21\pi}{4},\frac{11\pi}{2}$	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,$ $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $-\frac{3\pi}{4},-\frac{2\pi}{3},\ \frac{\pi}{4}$
Вар.2	а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $-\frac{8\pi}{3},-\frac{4\pi}{3}$	а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,$ $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;$ б) $-\frac{7\pi}{3}$	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k;$ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}$	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,$ $\pi+2\pi k;$ б) $\frac{5\pi}{2};3\pi;\frac{7\pi}{2}$	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,$ $-\frac{\pi}{3}+\pi k$ б) $\frac{9\pi}{4},\frac{8\pi}{3},\frac{13\pi}{4}$	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,$ $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{4}$

	№1.	№2.	№3.	№4.
Вар.3 **ЕГЭ-2024**	а) $\pi k;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; б) $4\pi;\ \frac{14\pi}{3};\ 5\pi$.	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ б) $\frac{17\pi}{6}$.	а) $\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; б) $-3\pi,-2\pi,-\frac{11\pi}{4}$.	а) $\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k$ б) $-\pi;-\frac{5\pi}{4};-2\pi$.
	№5.	**№6.**	**№7.**	**№8.**
	$\frac{\pi}{2}+\pi k;$ а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k;$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $-\frac{7\pi}{2},-\frac{8\pi}{3},-\frac{5\pi}{2}$.	а) $\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{11\pi}{6}+2\pi k,$ $\frac{\pi}{2}+\pi k$ б) $\frac{7\pi}{2};\ \frac{23\pi}{6};\ \frac{9\pi}{2}$.	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ б) $\frac{5\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6}$.	а) $\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k,$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $2\pi,\ 3\pi,\ \frac{10\pi}{3}$.

✓ *Тригонометрический круг*



✓ *Основные тригонометрические формулы*

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ **2.** $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ **3.** $ctg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ **4.** $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

5. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$ **6.** $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$

7. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ **8.** $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

9. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ **10.** $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

11. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ **12.** $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

13. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

14. $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ **15.** $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

16. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ **17.** $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

18. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **19.** $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

20. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ **21.** $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

22. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$ **23.** $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

24. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$

25. $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ **26.** $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ **27.** $\left|tg\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

28. $\sin 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ **29.** $\cos 2\alpha=\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

30. $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),\ \sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

✓ *Алгоритм применения формул приведения*

1. *Исследуем функцию на четность/нечетность.*

$$\cos(-t)=\cos t$$
$$\sin(-t)=-\sin t$$
$$tg(-t)=-tgt$$
$$ctg(-t)=-ctgt$$

2. *Исследуем функцию на периодичность.*

$$T_{\cos t}=T_{\sin t}=2\pi \quad \text{или} \quad \begin{matrix}\sin(t+2\pi k)=\sin t\\ \cos(t+2\pi k)=\cos t\\ tg(t+\pi k)=tgt\\ ctg(t+\pi k)=ctgt\end{matrix} \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$T_{tgt}=T_{ctgt}=\pi$$

3. *Представим угол в виде:* $\left(\frac{\pi}{2}\pm t\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}\pm t\right)$, $(\pi\pm t)$ *или* $(2\pi\pm t)$, *где* $t\in I$.

4. ***Определим знак исходной функции и поставим его перед приводимой функцией.***
5. ***Для углов вида***
   - $\left(\frac{\pi}{2}\pm t\right)$ ***или*** $\left(\frac{3\pi}{2}\pm t\right)$ ***название функции изменяем на “ко-функцию”;***

для углов вида

   - $(\pi\pm t)$ ***или*** $(2\pi\pm t)$ ***название функции*** **не изменяем.**

- *Уравнение вида* $a\sin x+b\cos x=0 \quad (a\sin kx+b\cos kx=0)$

  называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени, причем $a\neq 0,\ \ b\neq 0$;

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения первой степени

1. *Делим обе части уравнения*

   $a\sin x+b\cos x=0 \quad (a\sin kx+b\cos kx=0)$ *на* $\cos x \quad (\cos kx)$.

2. *Получим уравнение вида*

   $a\cdot tgx+b=0 \quad (a\cdot tgkx+b=0)$, *где* $tgx=-\dfrac{b}{a} \quad \left(tgkx=-\dfrac{b}{a}\right)$.

Замечание: В однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление на выражение, содержащее переменную вполне благополучная операция. Значения *x*, при которых $\cos x=0$, не являются решением, т. к. при этих значениях $\sin x\neq 0$.

- *Уравнение вида*

  $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0 \quad (a\sin^2 kx+b\sin kx\cos kx+c\cos^2 kx=0)$

  называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения второй степени

$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0 \quad (a\sin^2 kx+b\sin kx\cos kx+c\cos^2 kx=0)$

1. *Если* $a\sin^2 x$ *и* $c\cos^2 x$ *содержатся в уравнении (т.е.* $a\neq 0,\ c\neq 0$*), то уравнение решается делением обеих его частей на* $\cos^2 x$ *и последующим введением новой переменной* $t=tgx$.
2. *Если* $a\sin^2 x$ $(c\cos^2 x)$ *в уравнении не содержится (т.е.* $a=0$ *или* $c=0$*), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят* $\cos x$ $(\sin x)$.

Замечание: Если вы сомневаетесь: можно или нет делить на $\cos^2 x$, то подставьте в исходное уравнение $\cos x=0$.
Если уравнение обратилось в верное числовое равенство - нельзя делить, выносим общий множитель;
получили неверное числовое равенство - можно делить.