

Системы рациональных уравнений с параметром

1. Системы линейных уравнений с параметром
2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром
3. Геометрические приемы решения систем уравнений с параметром
4. Комбинации окружностей
5. Геометрические приемы решения систем уравнений с параметром
(продолжение)

1. Системы линейных уравнений с параметром

■ Примеры

№1. При каком значении a система $\begin{cases} (a-2)x - 2y = 3 \\ 2x - (a+1)y = a+3 \end{cases}$ не имеет решений?

№2. При каком значении a система $\begin{cases} (a-3)x + 4y = 5 \\ 2x + (a+4)y = a+6 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№3. Найти все значения a , при которых любое решение системы $\begin{cases} 2x + y = a \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y^2 < 2x + 3$.

№4. Найти все значения a , при которых любое решение системы $\begin{cases} ax + y = 1 \\ 3x - y = a \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x < y$.

№5. Для системы уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 2a^2 - 6a + 2 \\ 3x + 2y = 3a^2 + 4a + 3 \end{cases}$ определите, при каком значении параметра a сумма $x + y$ принимает наименьшее значение.

№6. При каких значениях a решение системы $\begin{cases} (a-2)x + 2(a^2 - 2a)y = 3a^2 + 16 \\ (a^2 - 2a)x - 4(a-2)y = a^3 + 12a \end{cases}$ удовлетворяет условию $x - 8y \leq 0$?

№7. При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} a^2x - by = a^2 + 2b \\ 4bx - b^2y = 4 - 3b \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№8. Найдите все значения параметра p , при которых найдется не менее двух различных значений параметра q таких, что система $\begin{cases} (p-4)x + (p^2 - 7p + 12)y = q^2 - 6q + 5 \\ (p-1)x + 8y = 4pq \end{cases}$, имеет бесконечное множество решений.

▪ **Ответы (примеры)**

1. Системы линейных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
-2	4	$(-1; 9)$	$(-\infty; -3);$ $(-2; 1)$	-1	$(-\infty; 2);$ $\{4\}$	$a = \pm 2,$ $b_1 = -4, b_2 = \frac{1}{2}$	4 и 5

▪ **Тест**

1. Системы линейных уравнений с параметром

№1. Определить значение параметра p , при котором система $\begin{cases} -8x + 4y = -1 \\ 9x + py = 3 \end{cases}$ не имеет решений.

№2. Определить значение параметра p , при котором система $\begin{cases} -3x - 3y = -5 \\ 7x + py = 7 \end{cases}$ не имеет решений.

№3. При каком значении a система $\begin{cases} (a-1)x - 3y = 2 \\ 2x + (a-8)y = a+2 \end{cases}$ не имеет решений?

№4. При каком значении a система $\begin{cases} (a+3)x + 5y = 1 \\ -2x + (a+14)y = a+6 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№5. Найти все значения a , при которых любое решение системы $\begin{cases} x + y = a \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y^2 < x$.

№6. Найти все значения a , при которых любое решение системы $\begin{cases} ax + ay = 2 \\ x + 2y = a \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x < y + 4$.

№7. При каких значениях p и q система уравнений $\begin{cases} px + qy = 3p + 5 \\ qx + 4py = 6q - 5p \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№8. При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} b^2x + ay = 2b^2 + 8a \\ ax + a^2y = 2,25 - 5a \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

№9. При каких значениях a решение системы $\begin{cases} (a-1)x - (a^2-a)y = 9-2a^2 \\ (a^2-a)x + 3(a-1)y = a^3+18a \end{cases}$ удовлетворяет условию $x+2y \geq 0$?

▪ **Ответы (тест)** 1. Системы линейных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
-4,5	7	7	-4	$\left(0, \frac{15}{4}\right)$	$(-3, 0); (1, \infty)$	$p=10, q=20;$ $p=\frac{10}{11}, q=-\frac{20}{11}$	$\left(-\frac{9}{8}; 1\right); \left(-\frac{9}{8}; -1\right);$ $\left(\frac{1}{4}; 1\right); \left(\frac{1}{4}; -1\right)$	$\{-3\}; (1; \infty)$

2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром

■ Примеры

№1. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = 2(2x + y) \\ a^2 + ax + 2ay = 5 \end{cases}$$
 имеет решение.

№2. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 2x^2 + 3y^2 \\ -x + 2y + 3z = a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (x - 2a + 2)^2 + (y + a - 2)^2 = a + \frac{5}{2} \\ x + y = 1 - a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) - ax + (a - 3)y + 1 = 0 \\ xy - 1 = y - x \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = (a + 2)x^2 + 2ax + a - 2 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y = |a + 1| \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

№7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y = \left| y - 2 + \frac{3}{x} \right| \\ 2y(y - 4) + 3x(ax + 4) = xy(2a + 3) \end{cases}$$
 имеет больше трех решений.

№8. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = (a + 2)x^2 + 2ax + a - 1 \\ x = (a + 2)y^2 + 2ay + a - 1 \end{cases}$$
 имеет ровно одно решение.

- №9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ имеет единственную пару решений.

- №10. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

- №11. Найти все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x+y)\sin\alpha + 8\sin^2\alpha = 2\sin\alpha - 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \end{cases}$ имеет единственное решение.

- №12. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8|x-y| + 8|a| \\ x+y = a \end{cases}$ имеет нечетное число различных решений.

- №13. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (|x| - a^2)^2 + (y-4a)(y+4a) = 9a^2 - 2y - 1 \\ y+1 = 6\sqrt{a} \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

- №14. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y^2 - x = 4 - 2a \\ y^4 + x^2 = a^2 - 3a + 4 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

■ **Ответы (примеры) 2. Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений параметром**

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
$-5; 1$	$-25/36$	$-0,5$ и 2	$(-\infty; 0);$ $(16; \infty)$	$\left(-\frac{17}{4}; -2\right);$ $(-2; 2);$ $\left(2; \frac{17}{4}\right)$	$(-0,5; 1 - \sqrt{2});$ $(1 + \sqrt{2}; \infty)$	$\left(-\frac{9}{16}; -\frac{1}{2}\right);$ $\left(-\frac{1}{2}; 0\right);$ $(0; 2); (2; \infty)$
№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14
$-2; \frac{9}{8}$	-2	$\left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$	$\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$	$\{-16; 0; -16\}$	$(\sqrt{13} - 2; 4);$ $\left\{\frac{36}{25}\right\}$	$\{1\} \cup \left(\frac{4}{3}; 3\right)$

■ **Тест** 2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром

№1. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 10 = 2(x + 3y) \\ a^2 + 2ax + ay = -6 \end{cases}$ имеет решение.

№2. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x + y + 2z = 4x^2 + y^2 \\ 2x + y + 3z = -a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (x - a + 3)^2 + (y + a - 2)^2 = a + \frac{7}{2} \\ x - y = a - 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (a+1)(x^2 + y^2) + (a-1)x + (a+1)y + 2 = 0 \\ xy - 1 = x - y \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 - 1 \\ x^2 - y = |a - 1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y + 2 - \frac{4}{x} = \left| y + \frac{2}{x} - 3 \right| \\ 2y(y + 2) + 3x(ax - 2) = xy(2a + 3) \end{cases}$ имеет больше трех решений.

№7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = (a+2)x^2 - (2a+1)x + a - 3 \\ x = (a+2)y^2 - (2a+1)y + a - 3 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№8. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 10xy = 0 \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

№9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

№10. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6|x - y| + 6|a| \\ x + y = a \end{cases}$ имеет нечетное число различных решений.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

№11.
$$\begin{cases} (|x| + a^2)^2 + (y - 4a)(y + 4a) = 4y - 4 \\ 0,5y - 1 = \sqrt{6a} \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

№12. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y^2 - x = 2a + 8 \\ y^4 + x^2 = a^2 - 5a - 6 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

■ **Ответы (тест) 2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром**

№1	№2	№3	№4	№5	№6
$-3; -2$	$-\frac{5}{96}$	$1 \text{ и } 9$	$(-3; -1)$	$(-\infty; -3)$	$\left(-\frac{25}{16}; -1,5\right); (-1,5; 0); \left(0; \frac{19}{6}\right); \left(\frac{19}{6}; \infty\right)$
№7	№8	№9	№10	№11	№12
$-\frac{7}{3}; -2$	$-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}$	2	$0; 12; -12$	$(2; \sqrt{13} - 1)$	$\left(-\frac{7}{3}; -2\right)$

3. Графические и геометрические приемы решения систем уравнений с параметром

■ **Примеры**

№1. Найти наименьшее расстояние от точки $A(-4; 4)$ до окружности $x^2 + y^2 - 2x + 16y + 56 = 0$.

№2. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 4 \\ y = 3 - |x| \end{cases}$$
 имеет ровно два решения?

№3. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = 4 \\ |y| = x \end{cases}$$
 имеет ровно два решения?

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25 \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$
 имеет ровно три решения.

№5. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

№6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3a + 1)^2 + (y + 2a)^2 = a - 1 \\ 4x + 3y = a + 1 \end{cases} \text{ имеет более одного решения.}$$

№7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = |1,6a| \\ y = ax - a^2 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

№8. Найти все значения параметра, при которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

№9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 2) \leq 0 \\ 8x^2 + 8y^2 - 16a(x - y) + 15a^2 - 48y - 50a + 72 = 0 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

№10. При каком значении a радиус окружности, вписанную в фигуру, заданную уравнением $3|x - 2| = a - |y|$, равен $\sqrt{10}$?

№11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 6 \\ x^2 + (y - a)^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

№12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2|xy - 3y - 4x + 12| = a^2 + 2a - z - 30 \\ 3a^2 - a - z - 32 = 0 \\ z - x^2 - y^2 + 6x + 8y = 0 \end{cases} \text{ имеет ровно 4 решения.}$$

№13. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = \sqrt{x + 4} \end{cases} \text{ имеет ровно три различных решения.}$$

№14. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = (\sqrt{x})^4 - 3 \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

№15. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = (\sqrt{-x})^4 - 5 \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

№16. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} 3|x - 2a| + 2|y - a| = 6 \\ xy - x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

№17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x - a| + |y| = 2 \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

▪ **Ответы (примеры)** 3. Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений

№1	№2	№3	№4	№5
10	$(1; 5); \{3 - 2\sqrt{2}\}$	$(-2; 2); \{2\sqrt{2}\}$	$9 - 5\sqrt{2}; 4; 5\sqrt{2} - 1$	$2,6 \text{ и } (\sqrt{10}; \sqrt{17}]$
№6	№7	№8	№9	№10
$(1; 2)$	$(-2; 0); (0; 2)$	$\pm 0,2$	$-\frac{16}{7}; -2; 0; 2$	10
№11	№12	№13	№14	№15
$(-3; -1); \left\{ \frac{-6 + \sqrt{13}}{3} \right\};$ $(1; 3); \left\{ \frac{6 - \sqrt{13}}{3} \right\}$	$1,8 \text{ и } 2$	$\left[4; \frac{17}{4} \right)$	$(\sqrt{3}; 3) \text{ и } \left\{ \frac{13}{4} \right\}$	$(\sqrt{5}; 5) \text{ и } \left\{ \frac{21}{4} \right\}$
№16	№17			
$2; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}; 0$	$[-4; 2 - 2\sqrt{2});$ $(-2 + 2\sqrt{2}; 4]$			

▪ **Тест** 3. Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений

№1. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ |y - a| - x = 5 \end{cases}$ имеет четыре решения.

№2. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} 8x - 15y = 36 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x + 2a)^2 + (y + 3a + 1)^2 = a + 1 \\ 3x - 4y = a - 1 \end{cases}$ имеет более одного решения.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = |2,7a| \\ y = a(x - a) \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

№5. Найти все значения параметра, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 10xy \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

№6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} y(y + 1) \leq 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6a(x + y) + 5a^2 - 6x + 4a + 3 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№7. При каком значении a , радиус окружности, вписанной в фигуру, заданную уравнением $|x| + 2|y - 1| = a$, равен $2\sqrt{5}$?

№8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3|x| + 2|y| = 12 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет наибольшее число решений.

№9. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = \sqrt{9 - x} \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

№10. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = 6 - (\sqrt{x})^4 \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

№11. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = (\sqrt{x})^4 - 7 \end{cases} \text{ имеет ровно три различных решения.}$$

№12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} |x-a| + 2|y-a| = 5 \\ xy - x - y + 1 = 0 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

▪ **Ответы (тест)**

3. Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений

№1	№2	№3	№4	№5	№6
$(5 - 4\sqrt{2}; -5 + 4\sqrt{2})$	$\frac{36}{17}; (5; 4\sqrt{10}]$	$(-1; 0)$	$(-3; 0); (0; 3)$	$\pm 0, 2$	$0 \text{ и } 1$
№7	№8	№9	№10	№11	№12
10	$(\frac{144}{13}; 16)$	$(3; 9); \{\frac{37}{4}\}$	$(\sqrt{6}; 6); \{\frac{25}{4}\}$	$[7; \frac{29}{4})$	$-1, 5; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 3, 5$

4. Комбинации окружностей.

Геометрические приемы решения систем уравнений с параметром

■ Примеры

№1. Найти все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№2. Найти все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y \\ x^2 + y^2 = 2(1+a)x + 2(1-a)y - 2a^2 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (4x^2 + 3a^2 + 40x - 12a + 112)((x-1)^2 + (a-4)^2 - 4) = 0 \\ (x+2)^2 + (a+2)^2 = 25 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№4. Найти все значения параметра, при которых система $\begin{cases} x^2 + 8x + y^2 + 8y + 23 = 0 \\ x^2 - 2a(x+y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

№5. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(x+y) = -2a^2 + a \\ x^2 + y^2 + 4a(x-y) = -8a^2 + 9a \end{cases}$ имеет единственное решение?

№7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(2y-x)a = 1 + 2a - 4a^2 \\ x^2 + y^2 + 4(x-y)a = 4 + 4a - 7a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№8. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x-y| \\ x + 2y = a \end{cases}$ имеет более двух решений.

- №9. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1| \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$
 имеет более двух решений.

- №10. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2| \\ x - y = a \end{cases}$$
 имеет более двух решений.

- №11. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \left(\frac{|x+4| + |x-4|}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{|y+1| + |y-1|}{2} - 5 \right)^2 = 25 \\ y = ax - 8a \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

▪ **Ответы (примеры)** 4. Комбинации окружностей

№1	№2	№3	№4	№5
9 и 49	$(-2; 0);$ $(0; 2)$	$\frac{14}{5}$	$-11 \pm 7\sqrt{2};$ $-5 \pm \sqrt{2}$	$3; \sqrt{65} + 2$

№6	№7	№8	№9	№10	№11
$0; 0,4$ и $1,6$	$-3/7; \pm 0,2; 1$	$-5\sqrt{5} - 5 < a \leq -10$ $0 \leq a < 5\sqrt{5} - 5$	$1 < a < 2$	$(1 - \sqrt{10}; -2); 0$	$\left(-\frac{34}{12}; -\frac{1}{4} \right);$ $\left[\frac{1}{4}; \frac{35}{12} \right)$

■ Тест

4. Комбинации окружностей

- №1. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} (3x^2 + 4a^2 + 42x - 16a + 163)((x-1)^2 + (a-5)^2 - 9) = 0 \\ (x+3)^2 + (a+1)^2 = 25 \end{cases}$$
- имеет ровно одно решение.

- №2. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} (x-2a+3)^2 + (y-a)^2 = 2,25 \\ (x+3)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$
- имеет единственное решение.

- №3. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
- имеет единственное решение.

- №4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(2y-x)a = 1 - 2a - 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 4(x-y)a = 4 - 4a - 7a^2 \end{cases}$$
- не имеет решений.

- №5. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10| \\ x + 2y = a \end{cases}$$
- имеет более двух решений.

- №6. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25| \\ x - y = a \end{cases}$$
- имеет более одного решения.

- №7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} \left(\frac{|x-1| + |x+1|}{2} - 7 \right)^2 + \left(\frac{|y-7| + |y+7|}{2} + 1 \right)^2 = 100 \\ y = ax + 8 \end{cases}$$
- имеет ровно два различных решения.

■ Ответы (тест)

4. Комбинации окружностей

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
$a = \frac{50}{13}$	$\frac{1}{6}$ и $2,5$	$3\sqrt{2} - 2;$ $\sqrt{34} + 2$	$(-\infty; -1);$ $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right);$ $\left(\frac{3}{7}; \infty\right)$	$-5\sqrt{5} < a \leq -5$ $5 \leq a < 5\sqrt{5}$	$-5 \leq a < 5\sqrt{2} - 10$	$\left[-1; \frac{10\sqrt{30} - 63}{51}\right];$ $\left[\frac{63 - 10\sqrt{30}}{51}; 1\right]$

5. Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром (продолжение)

■ Примеры

№1. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(x+|y|-2)(x^2+4x+y^2+2)}{x-2} = 0 \\ y = \sqrt{a-5} \cdot x \end{cases} \quad \text{имеет ровно два различных решения?}$$

№2. При каких значениях a система $\begin{cases} x\left(3x^2 + \frac{3y^2}{2} - \frac{y}{2} - 3\right) = |x|\left(\frac{3y^2}{2} + \frac{y}{2}\right) \\ y = x + 2a \end{cases}$ имеет ровно три различных решения? Найдите все возможные значения a .

№3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} - 2a\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) + a^2 - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a(x+y) = 0 \end{cases} \quad \text{не имеет решений.}$$

№4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} - 4a\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4a^2 + 2 = 0 \\ |x+y-3| + |x-y| = 1 \end{cases} \quad \text{имеет два решения.}$$

№5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(y - x + 3a) = 0 \\ |xy| = a \end{cases} \quad \text{имеет ровно шесть решений.}$$

№6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 1 \\ |y| + x^2 + 2x = 0 \end{cases} \quad \text{имеет ровно четыре различных решения.}$$

№7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (4-y)^2 = 0, 1a^2 - 4(x+1) - 4(y+1) \\ |2x-3| - |4-y| = 5 \end{cases} \quad \text{имеет ровно два решения.}$$

■ **Ответы (примеры)** 5. Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром (продолжение)

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
$\{5\};$ $[6; +\infty)$	$\left(-\frac{37}{24}; -\frac{3}{2}\right);$ $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$	0	1; 5/4	$\left(0; \frac{4}{9}\right);$ $(1; +\infty)$	$\left(-\frac{5}{4}; -1\right);$ $\left(-1; -\frac{3}{4}\right)$	$(-4\sqrt{65}; -\sqrt{290});$ $(-12\sqrt{2}; -8\sqrt{2});$ $(8\sqrt{2}; 12\sqrt{2});$ $(\sqrt{290}; 4\sqrt{65})$

■ **Тест** 5. Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром (продолжение)

№1. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(|y| - x - 2)(x^2 - 4x + y^2 + 2)}{x + 2} = 0 \\ y = \sqrt{a - 3 \cdot x} \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения?}$$

№2. При каких значениях a система $\begin{cases} 3x\left(2x^2 + y^2 - \frac{y}{2} - 1\right) = |3x|\left(y^2 + \frac{y}{2}\right) \\ y = x + a \end{cases}$ имеет ровно три различных решения? Найдите все возможные значения a .

№3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (ay + ax + 4)(y + x + 3a) = 0 \\ |xy| = a \end{cases}$ имеет ровно шесть решений.

№4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = |x - a| - 4 \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

№5. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (6 - x)^2 + (y + 6)^2 = (0,5 - a)^2 - 2(x + y + 1) \\ |x + 2| - |1 - 2y| = 3 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

▪ **Ответы (тест)** 5. Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром (продолжение)

№1	№2	№3	№4	№5
$3; [4; \infty)$	$\left(-\frac{9}{8}; -1\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]; \{1\}$	$\left(0; \frac{4}{9}\right); (\sqrt[3]{4}; \infty)$	$(-13; -5); (-3; 5)$	$(-\infty; -12);$ $(-8; 0,5 - 3,8\sqrt{5});$ $(0,5 + 3,8\sqrt{5}; 9);$ $(13; +\infty)$

Справочные материалы

✓ **Линейное уравнение**

Линейное уравнение вида $ax = b$, где x - переменная, a и b - параметры, имеет:

- Единственное решение $x = \frac{b}{a}$, если $\begin{cases} a \neq 0 \\ b - \text{любое число} \end{cases}$.
- Пустое множество решений, если $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ и уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$.
- Бесконечное множество решений, если $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ и уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$.

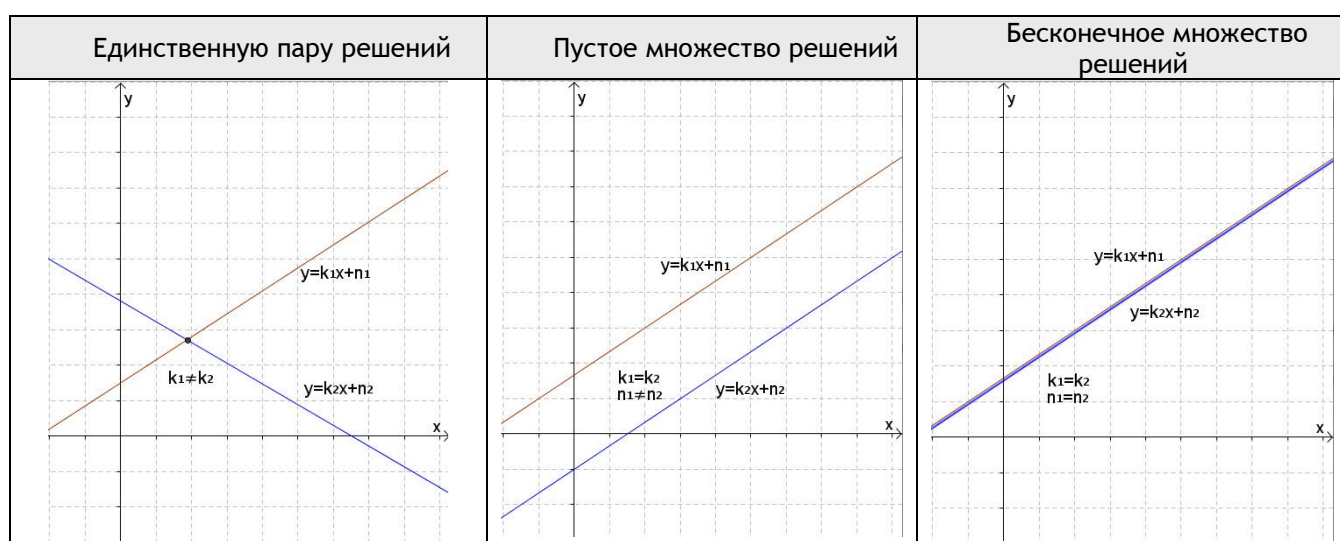
✓ Система линейных уравнений

Система линейных уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ имеет:

- Единственную пару решений $(x; y)$, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.
- Пустое множество решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.
- Бесконечное множество решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Геометрическая интерпретация

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая. Тогда система линейных уравнений имеет:



✓ Уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $(x_0; y_0)$ – координаты центра, R – радиус.

✓ Расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

✓ Расстояние от точки $M(x_M; y_M)$ до прямой $ax + by + c = 0$:

$$\rho(M; ax + by + c = 0) = \frac{|a \cdot x_M + b \cdot y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$