

ение:

Разрешим уравнение относительно x .

$$x(a^2 - 1) = a^3 - 1$$
$$x(a-1)(a+1) = a^3 - 1$$

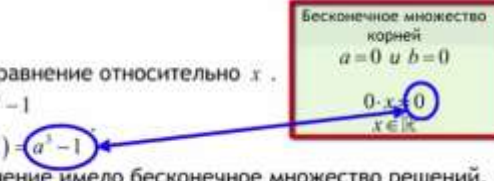
Чтобы уравнение имело бесконечное множество решений, не

Бесконечное множество корней

$a = 0$ и $b = 0$

$0 \cdot x = 0$

$x \in \mathbb{R}$



- Подготовка к [Заданию №18](#)
ЕГЭ Профиль

Рациональные уравнения с параметром

1. Линейные уравнения с параметром

▪ Примеры

Решите уравнения:

№1. При каком значении a уравнение $a^2x + 1 = x + a^3$ имеет бесконечное множество решений?

№2. При каком значении a уравнение $4x - 3a = a^2x - 6$ не имеет решений?

№3. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 - 9)x = a + 3$.

■ Тест

1. Линейные уравнения с параметром

Вариант 1

№1. При каком значении a уравнение $(a^2 + a)x - 2 = a + (a + 4)x$ имеет бесконечное множество решений?

№2. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 - 25)x = a + 5$.

№3. При каких значениях a уравнение не имеет решений $(3x - a)^2 + (4x + 1)^2 = (5x - 1)^2$.

№4. Найти значения a , при которых равенство $\frac{8x - 35a - 3}{15a} = \left(\frac{7}{3} + \frac{1}{5a}\right)(x - 1) + \frac{x}{3}$

№5. При каких значениях параметра b уравнение $9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4x - b^2(b + \sqrt{3})$ имеет бесконечно много корней

Вариант 2

№1. При каком значении a уравнение $x = \frac{a - 9}{10}x + 25$ не имеет решений?

№2. Для каждого значения a решите уравнение $(a - 5)(a + 3)x = a^2 - 25$.

№3. При каких значениях a уравнение не имеет решений $(2x - 3a)^2 + (x - 1)^2 = 5(x - 2)(x + 2)$.

№4. Найти все значения a , при которых равенство $\frac{a(2x - 7) - 8x - 35}{5 + a} = \frac{x - 21}{3}$ верно для всех x .

№5. При каком значении параметра a уравнение $(x - 13)(x - 14)(x - 15) = (x - a)(x^2 - 28x + 195)$ имеет больше десяти решений?

Вариант 3

№1. Найти значения a , при которых равенство $\frac{a - 1}{5}x - \frac{2}{5} = \frac{6}{a + 6}x - \frac{a}{a + 6}$ имеет место при любом значении x .

№2. При каком значении параметра a уравнение $(a - 1)(a + 6)x - 2(a + 6) = 30x - 5a$ не имеет решений?

№3. Для каждого значения a решите уравнение $(a - 7)(a + 5)x = a^2 - 49$.

▪ **Ответы (тест)** 1. Линейные уравнения с параметром

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	-2	1) $a \neq 5, a \neq -5, x = \frac{1}{a-5}$ 2) $a = 5, x \in \emptyset$ 3) $a = -5, x \in \mathbb{R}$	3	0,125	$-\sqrt{3}$
Вар.2	19	1) $a \neq 5, a \neq -3, x = \frac{a+5}{a+3}$ 2) $a = -3, x \in \emptyset$ 3) $a = 5, x \in \mathbb{R}$	-1/6	5,8	14
Вар.3	4	-9	1) $a \neq 7, a \neq -5, x = \frac{a+7}{a+5}$ 2) $a = -5, x \in \emptyset$ 3) $a = 7, x \in \mathbb{R}$		

2. Квадратные уравнения с параметром

■ Примеры

№1. Вычислить $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$, где x_1 и x_2 корни уравнения $2x^2 + 6x + 1 = 0$.

№2. Найти значение p , если корни уравнения $2x^2 - 5x + p = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{65}{8}$.

№3. Найти значение a , при котором сумма кубов корней уравнения $2x^2 - 4x + a = 0$ равна $7/2$.

№4. Найти целое значение a , при котором один из корней уравнения $x^2 - (a + 2)x + 5a - 15 = 0$ в три раза больше другого.

№5. В уравнении $x^2 + bx + 45 = 0$ найти коэффициент b , если корни уравнения находятся в зависимости $\frac{x_1 + 1}{x_2 + 1} = 2$.

■ Тест

2. Квадратные уравнения с параметром

Вариант 1

№1. Вычислить $x_1 \cdot x_2^4 + x_1^4 \cdot x_2$, где x_1 и x_2 корни уравнения $2x^2 + 3x - 4 = 0$.

№2. Вычислить $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$, где x_1 и x_2 корни уравнения $2x^2 - 7x + 2 = 0$.

№3. Найти значение p , если корни уравнения $6x^2 + 3x - p = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \cdot x_2^4 + x_1^4 \cdot x_2 = \frac{63}{8}$.

№4. Найти значение a , при котором сумма квадратов корней уравнения $2x^2 - 10x + a = 0$ равна 17.

№5. Найти целое значение a , при котором один из корней уравнения $x^2 - (a+1)x + 3a - 6 = 0$ в два раза больше другого.

№6. В уравнении $2x^2 + bx - 15 = 0$ найти коэффициент b , если корни уравнения находятся в зависимости $\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)(x_1 - 1) = -12$.

Вариант 2

№1. Вычислить $x_1^2 \cdot x_2^5 + x_1^5 \cdot x_2^2$, где x_1 и x_2 корни уравнения $2x^2 + 4x - 1 = 0$.

№2. Вычислить $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$, где x_1 и x_2 корни уравнения $2x^2 - 8x + 1 = 0$.

№3. Найти значение p , если корни уравнения $3x^2 - 2px - 15 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \cdot x_2^3 + x_2 \cdot x_1^3 = -\frac{530}{9}$.

№4. Найти значение a , при котором разность квадратов корней уравнения $3x^2 + x + a = 0$ равна $7/9$.

№5. Найти все значения b , при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - (2b-1)x + b^2 - b - 6 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = 37$.

№6. В уравнении $3x^2 - 7x + b = 0$ найти коэффициент b , если корни уравнения находятся в зависимости $\left(x_1 + \frac{2}{3}\right)(x_2 - 1) = 1$.

▪ **Ответы (тест)** 2. Квадратные уравнения с параметром

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	24,75	32,375	13,5	8	8	1 и 7
Вар.2	-2,75	464	-2 и 2	-4	-3 и 4	2

3. Количество корней целых уравнений с параметром

■ Примеры

№1. При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение.

№2. При каких значениях a уравнение $(a-4,2)x^2 - (a-3)x - 1,25 = 0$ имеет единственное решение.

№3. При каких значениях k , уравнение $(k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7 = 0$ имеет два совпадающих корня.

№4. При каких значениях a уравнение $ax^2 + 2\sqrt{3}x + 2a + 1 = 0$ имеет два различных корня?

№5. При каких значениях m уравнение $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 6 = 0$ не имеет действительных корней?

Вариант 1

№1. При каких значениях a уравнение $(a+1)x^2 + (2a+2)x + 3 = 0$ имеет единственное решение.

№2. При каких a уравнение $(a+1)x^2 + ax - 1 = 0$ имеет единственное решение.

№3. При каких значениях a уравнение $ax^2 - 2\sqrt{6}x + a + 1 = 0$ имеет два различных корня?

№4. При каких значениях a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ не имеет корней?

№5. Найти число целых значений a , при которых уравнение $x^3 - 3x = a(x^3 + x)$ имеет три различных корня?

Вариант 2

№1. При каких значениях a уравнение $(a-3)x^2 - (9-3a)x + 2,25 = 0$ имеет единственное решение.

№2. При каких a уравнение $(a+1,875)x^2 + (1+a)x - 2 = 0$ имеет единственное решение.

№3. При каких значениях a уравнение $ax^2 + 4\sqrt{2}x + 3a + 10 = 0$ имеет два различных корня?

№4. Найти целое значение a , при котором уравнение $(a-12)x^2 + 2(a-12)x + 2 = 0$ не имеет действительных корней.

№5. При каком целом значении a уравнение $x^3 - x = a(x^3 + x)$ имеет три различных корня?

▪ **Ответы (тест)** 3. Количество корней целых уравнений с параметром

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	2	-2 и -1	$(-3;0) \cup (0;2)$	$(-\infty;-4) \cup (1;\infty)$	$(-3;1)$
Вар.2	4	-8; -2 и -1,875	$(-4;0) \cup \left(0;\frac{2}{3}\right)$	$(12;14)$	$(-1;1)$

4. Дробно-рациональные уравнения с параметром

▪ **Примеры**

№1. При каком значении a уравнение $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - a} = 0$ имеет один корень?

№2. При каком значении a уравнение $\frac{(a+2)x^2 + (a+7)x + 5}{x-1} = 0$ имеет один корень?

№3. Найти значение параметра a для которых уравнение $\frac{x^2 - 3a}{x^2 - 25} = \frac{ax + 5}{x^2 - 25}$ имеет единственное решение.

№4. При каком значении параметра p уравнение $\frac{5x-3}{x^2-11x+24} = \frac{p}{x-8}$ не имеет решений?

▪ **Тест**

4. Дробно-рациональные уравнения с параметром

№1. При каком значении a уравнение $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - a} = 0$ имеет один корень?

№2. При каком значении a уравнение $\frac{(a-2)x^2 + 4x + 1}{x + 1} = 0$ имеет один корень?

№3. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 + (a-2)x + 2,25}{x-3} = 0$ имеет единственное решение?

№4. При каких значениях a уравнение $\frac{x-a}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$ не имеет решений?

№5. При каком наибольшем значении p уравнение $\frac{4x-1}{x^2-7x+6} = \frac{p}{x-6}$ не имеет решений?

▪ **Ответы (тест)**

4. Дробно-рациональные уравнения с параметром

№1	№2	№3	№4	№5
1 и 3	2; 5 и 6	-4,75; 0; 2 и 8	1,75 и 4	4 и 4,6

5. Условия на корни рациональных уравнений с параметром

■ Примеры

№1. При каких значениях a уравнение $\frac{a+2x}{3} = \frac{ax-1}{2}$ имеет отрицательный корень?

№2. При каких значениях a уравнение $\frac{a+4}{3x-a} = \frac{3}{x-2}$ имеет положительный корень?

№3. Найти все значения p , для которых корень уравнения $p^2(x-3) - p(8x-19) = 22-16x$ меньше 2.

№4. При каких значениях b корень уравнения $(2-b)(b+x) = 15-7b$ больше или равен 3?

№5. Найти значения корня уравнения $x^2 + 3ax + 6a - 16 = 0$, если известно, что значение параметра $a \geq 1$.

№6. Найти число целых значений a , при которых уравнение $(a-2)x^2 + 2ax + 2a + 9 = 0$ имеет корни разных знаков.

№7. Найти все значения параметра a , при которых корни квадратного уравнения $ax^2 + 2(a+3)x + a + 2 = 0$ не положительны.

№8. При каком значении параметра a произведение корней уравнения $x^2 + 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \cdot x - a^2 + 6a - 5 = 0$ равно 3?

Вариант 1

- №1. При каких значениях a уравнение $\frac{3a+x}{2} = \frac{ax-3}{3}$ имеет отрицательный корень?
-
- №2. При каких значениях a корень уравнения $(x-1)(a^2-1) = 5-4a$ меньше или равен 0?
-
- №3. Найти все значения p , для которых корень уравнения $p^2(x-1) + p(13-10x) = 44-25x$ больше 2.
-
- №4. Найти наибольшее значение корня уравнения $x^2 + (3a+12)x + 33a+9 = 0$, если известно, что значение параметра $a \leq 3$.
-
- №5. Найти все значения параметра a , при которых корни квадратного уравнения $ax^2 + 2(a+5)x + a+3 = 0$ неотрицательны.

Вариант 2

- №1. При каких значениях a уравнение $\frac{2a+x}{3} = \frac{5ax-1}{4}$ имеет отрицательный корень?
-
- №2. При каких значениях c корень уравнения $(x-4)(c^2-4) = 10c+29$ не превосходит 3?
-
- №3. Найти все значения c , для которых корень уравнения $x+c^2+16 = cx+c$ меньше (-7).
-
- №4. Найти наибольшее целое положительное значение a , при котором уравнение $(a+4)x^2 - 20x + a - 4 = 0$ имеет два различных положительных корня.
-
- №5. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + 2\sqrt{a^2-3a+2} \cdot x - a^2 + 6a - 5 = 0$ различны и их произведение отрицательно?

Вариант 3

- №1. При каких значениях a уравнение $\frac{4a-1}{2x+a} = \frac{4}{x+1}$ имеет положительный корень?
-
- №2. Найти все значения c , для которых корень уравнения $c^2 - cx = x - c - 1$ меньше (-3).
-
- №3. Найти наименьшее целое значение a , при котором уравнение $(a-6)x^2 + 4x + a - 6 = 0$ имеет различные отрицательные корни

▪ **Ответы (тест)**

5. Условия на корни рациональных уравнений с параметром

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$	$(-1; 1) \cup \{2\}$	$(1; 5) \cup (5; 6)$	$[-12; -11) \cup [-9; \infty)$	$\left[-\frac{25}{7}; -3\right]$
Вар.2	$\left(\frac{4}{15}; \frac{3}{8}\right)$	$\{-5\} \cup (-2; 2)$	$(-\infty; -3) \cup (-3; 1)$	$(4; 8]$	$(-\infty; 1) \cup (5; \infty)$
Вар.3	$\left(\frac{9}{4}; \infty\right)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; -1)$	$(4; \infty) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right)$		

6. Общие корни рациональных уравнений с параметром

■ Примеры

№1. Найти значения a , при которых уравнения $x^2 - (a+3)x + 2a + 2 = 0$ и $x^2 + (a+3)x + 4a - 4 = 0$ имеют общий корень.

№2. Найти значения a , при которых уравнения $x^2 + (a-2)x - 2 = 0$ и $x^2 + (5-a)x + 3 = 0$ имеют общий корень.

№3. При каких значениях a уравнения $x^2 + \frac{a}{2}x + 1 = 0$ и $x^2 + x + \frac{a}{2} = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

№4. При каких значениях a уравнения $x^3 + ax - 2x + 3 = 0$ и $x^4 + ax^2 - 2x^2 + 3 = 0$ имеют общий корень?

№5. Уравнения $x^2 + (b-3a-4)x - 5 = 0$ и $x^2 + (2a-7b+14)x + 2a+b-2 = 0$ имеют одинаковые корни. Найти b .

▪ **Тест** 6. Общие корни рациональных уравнений с параметром

№1. Найти значения a , при которых уравнения $x^2 - (a+5)x + a + 4 = 0$ и $x^2 + (a-2)x + 3a - 15 = 0$ имеют общий корень.

№2. Найти значения a , при которых уравнения $x^2 + (a-10)x - 5 = 0$ и $x^2 + (3-a)x - 10 = 0$ имеют общий корень.

№3. При каких значениях a уравнения $x^2 + 3ax - 4 = 0$ и $x^2 + 4x - 3a = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

№4. При каких значениях a уравнения $x^4 - x - ax + 1 = 0$ и $x^5 - x^2 - ax^2 + 1 = 0$ имеют общий корень?

▪ **Ответы (тест)** 6. Общие корни рациональных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4
-7; 0,5; 4	6; 49/6	4/3; -1	1

7. Квадратные и, сводящиеся к ним, уравнения с параметром

■ Примеры

№1. Найти все значения параметра p , при которых произведение корней уравнения

$$px^2 + 14x + p^3 - 13p^2 = 0 \text{ равно } 14, \text{ а их сумма является целым числом.}$$

№2. Пусть x_1 - меньший корень, а x_2 - больший корни уравнения $x^2 - 10x + \frac{25}{49}p^2 = 0$. Найти все значения параметра p , при которых три числа $x_1, |p-6|, x_2$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

№3. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4 + 10(a-10)x^2 + 9(2a+5)^2 = 0$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии?

№4. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2 - 9x + t = 0$, а x_3, x_4 - корни уравнения $x^2 - 81x + s = 0$. При каких значениях параметра t и s четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют геометрическую прогрессию с положительными членами? В ответе указать отношение s/t .

№5. Найти все значения параметра p , при которых расстояние между корнями уравнения

$$x^2 + \left(\sqrt{p+19} - \frac{1}{\sqrt{p+19}} \right) x - 1 = 0 \text{ превышает число } 2.$$

№6. Найти все значения параметра p , при которых уравнение $|p|x^2 - 192x + 144p = 0$ имеет различные корни, принадлежащие промежутку $(-12; 24]$.

№7. При каких значениях a уравнение $x^2 - (4a-6)|x| + 3a^2 - 6a = 0$ имеет четыре различных решения?

■ **Тест** 7. Квадратные и, сводящиеся к ним, уравнения с параметром

- №1. Найти все значения параметра p , при которых произведение корней уравнения $px^2 + 9x + p^3 - 8p^2 = 0$ равно 9, а их сумма является целым числом.
-
- №2. Пусть x_1 - меньший корень, а x_2 - больший корни уравнения $x^2 - 10x + \frac{25}{169}p^2 = 0$. Найти все значения параметра p , при которых три числа $x_1, |p-12|, x_2$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.
-
- №3. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4 + 10(a-16)x^2 + 9(2a+8)^2 = 0$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии?
-
- №4. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2 - 16x + t = 0$, а x_3, x_4 - корни уравнения $x^2 - 64x + s = 0$. При каких значениях параметра t и s четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют геометрическую прогрессию с положительными членами? В ответе указать отношение s/t .
-
- №5. Найти все значения параметра p , при которых расстояние между корнями уравнения $x^2 + \left(\sqrt{p+31} - \frac{1}{\sqrt{p+31}} \right)x - 1 = 0$ превышает число 2.
-
- №6. При каких значениях a уравнение $x^2 - (5a-9)|x| + 4a^2 - 9a = 0$ имеет два различных решения?
-
- №7. Найти все значения параметра p , при которых уравнение $|p|x^2 - 42x + 9p = 0$ имеет различные корни, принадлежащие промежутку $(-3; 6]$.

■ **Ответы (тест)** 7. Квадратные и, сводящиеся к ним, уравнения с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
-1	7	-24 и 8/3	16	$(-31; -30) \cup (-30; \infty)$	$\left(0; \frac{9}{4}\right) \cup \{3\}$	$[5, 6; 7)$

8. Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Кусочно-линейные функции

■ Примеры

№1. При каком значении a уравнение $|3x - 7| = 2a - 13$ имеет единственное решение?

№2. Найти все значения параметра a , при которых графики функций $y = \frac{|x+3|}{x+3}$ и $y = |x+a|$ имеют одну общую точку.

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ имеет ровно один корень.

№4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $||x + 2| - 1| - 3| = 3 + |x + a|$ имеет единственное решение.

№5. При каких значениях параметра a уравнение $x - a = ||2x| - 1|$ имеет ровно три корня?

№6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $2|2|x| - a^2| = x - a$ имеет ровно три различных решения.

№7. Найти значения k , для которых уравнение $|x - 3| - |x + 5| = k - x$ имеет два решения.

№8. Найти все значения a , при которых уравнение $|x + 2| = ax + 1$ имеет единственное решение.

№9. При каких значениях параметра a уравнение $x + 2 = a|x - 1|$ имеет единственное решение?

№10. Найти значения k , для которых уравнение $|x - 5| - |x - 1| = kx + 1$ имеет единственное решение.

№11. Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение $|2x + 6| + |2x - 8| = ax + 12$ имеет единственное решение.

■ **Тест** 8. Графический способ решения уравнений с модулем и параметром.
Кусочно-линейные функции

№1. При каком значении m уравнение $|8x - 8| = m - 36$ имеет единственное решение?

№2. Найти все значения параметра a , при которых графики функций $y = \frac{x+4}{|x+4|}$ и $y = (x+a)^2$ имеют одну общую точку.

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $1 = |x-3| - |2x+a|$ имеет ровно один корень.

№4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $||x-3|+2|-3| = 1 + |x-a|$ имеет единственное решение.

№5. При каких значениях параметра a уравнение $a + 3x = ||5x| - 10|$ имеет ровно три корня?

№6. Найти все значение a , при которых уравнение $x - \frac{a}{2} = 4|4|x| - a^2|$ имеет четыре решения.

№7. Найти значения k , для которых уравнение $|x+3| - |x-4| = \frac{x}{3} + k$ имеет два решения.

№8. Найти все значения a , при которых уравнение $|x-4| = ax + 2$ имеет единственное решение.

№9. При каких значениях параметра a уравнение $x+1 = a|x-3|$ имеет единственное решение?

№10. Найти все значения a , при которых уравнение $\frac{|x+1|}{x+1} - 2 = -ax + a$ имеет два решения.

№11. При каких значениях параметра a уравнение $|x+2| + a|x-1| = 3$ имеет единственное решение?

№12. Найти значения k , для которых уравнение $|x+2| - |x-3| = kx$ имеет три решения

▪ **Ответы (тест)** 8. Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Кусочно-линейные функции

№1	№2	№3	№4	№5	№6
36	$[3; 5)$	-8; -4	$a < 1, a = 3, a > 5$	6; 10	$\left(-2; -\frac{1}{8}\right)$
№7	№8	№9	№10	№11	
-6 и $5\frac{2}{3}$	$(-\infty; -1); \{-0, 5\}; [1; \infty)$	$(-1; 1]$	$\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	$a < -1;$ $a > 1$	$\left(0; \frac{5}{3}\right)$

9. Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Квадратичная функция

▪ **Примеры**

№1. При каких значениях a уравнение $|x^2 - 4| - 3x - a = 0$ имеет два решения?

№2. При каких значениях a уравнение $|x + 3|(x - 5) + a = 0$ имеет ровно три решения?

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|3x^2 - 4x - 7| = a - 2x^2 - 7x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$ имеет ровно три различных решения.

№5. При каких значениях a уравнение $|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

№6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x + 1)|x + 1| = 2x - a$ имеет единственное решение.

№7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x \cdot |x| - 2x = ax + a + 2$ имеет единственное решение.

№8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x \cdot |x| = ax - x - 2$ имеет единственное решение.

▪ **Ответы (примеры)** 9. Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Квадратичная функция

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
$(-6; 6);$ $\left(6\frac{1}{4}; \infty\right)$	$(0; 16)$	$(-\infty; -5]$	3,5; 4; 4,5	0 и $\frac{49}{16}$	$(-\infty; -3);$ $(-1; \infty)$	$(-\infty; 2)$	$(-\infty; 1 + \sqrt{2})$

■ **Тест** 9. Графический способ решения уравнений с модулем и параметром.
Квадратичная функция

№1. При каких значениях a уравнение $a - |x^2 + 6x| = 8$ имеет четыре решения?

№2. При каких значениях a уравнение $|6 - x|(4 - x) + a = 0$ имеет единственное решение?

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|5x^2 - 4x - 1| = a - 5x^2 - x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

№4. При каких значениях a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

№5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x + 3)|x + 3| = 2x - a$ имеет два различных решения.

№6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x \cdot |x| - 4x = ax + a + 4$ имеет единственное решение.

№7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x \cdot |x| - 2x = ax - a - 2$ имеет единственное решение.

■ **Ответы (тест)** 9. Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Квадратичная функция

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
$(8; 26)$	$(-\infty; 0); (1; \infty)$	$(-\infty; 0]$	0 и $\frac{25}{12}$	-7 и -5	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 2)$

Линейные уравнения

- ✓ Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b - некоторые постоянные, называется **линейным уравнением**.

Количество корней линейного уравнения

Один корень	Нет корней	Бесконечное множество корней
$a \neq 0$ и b - любое число	$a = 0$ и $b \neq 0$	$a = 0$ и $b = 0$
$x = -\frac{b}{a}$	$0 \cdot x = -b$ $x \in \emptyset$	$0 \cdot x = 0$ $x \in \mathbb{R}$

Квадратные уравнения

- ✓ Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - некоторые числа ($a \neq 0$), называется **квадратным уравнением**.

Способы решения квадратного уравнения.

Для любых коэффициентов	Для четного коэффициента перед x	Формулы Виета	Неполное квадратное уравнение: $c = 0$	Неполное квадратное уравнение: $b = 0$
Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$ Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих решения: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней $x \in \emptyset$.	Дискриминант: $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ Формула корней: $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$	$D > 0$ и x_1, x_2 - корни уравнения $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ Если $a = 1$, то уравнение называется приведенным, тогда $x_1 + x_2 = -b$ $x_1 \cdot x_2 = c$ Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, а $x_2 = \frac{c}{a}$.	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ Если $-\frac{c}{a} = 0$, уравнение имеет один корень $x = 0$; Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней $x \in \emptyset$

Рациональные уравнения

- ✓ Если одна часть уравнения - целое выражение, а другая - дробно-рациональное или обе части - дробно-рациональные выражения, то такое уравнение называют **дробно-рациональным уравнением**.
- ✓ Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:
 1. Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
 2. Решить получившееся целое уравнение;
 3. Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.
- ✓ Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.
- ✓ Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Формулы сокращенного умножения (ФСУ)

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ разность квадратов
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ квадрат разности
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ квадрат суммы
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ разность кубов
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ сумма кубов
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ куб суммы
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ куб разности

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена