

Подготовка к профильному уровню

➤ Решение

1. Вычислите значение многочлена:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$$

$$а) \left(14\frac{16}{17} - 2 \cdot 5\frac{8}{17}\right)^2 = \left(14 + \frac{16}{17} - 2 \cdot \left(5 + \frac{8}{17}\right)\right)^2 = \left(14 + \frac{16}{17} - 10 - \frac{16}{17}\right)^2 = 4^2 = \underline{16};$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$$

$$б) \left(17\frac{11}{14} + 3 \cdot \left(-4\frac{11}{42}\right)\right)^2 = \left(17 + \frac{11}{14} - 12 - \frac{11}{14}\right)^2 = 5^2 = \underline{25}.$$

2. Найдите значение выражения:

$$а) (5,666)^2 - 4 \cdot (3,333)^2 = (5,666)^2 - (2 \cdot 3,333)^2 = (5,666 - 6,666)(5,666 + 6,666) = \underline{-12,332};$$

$$б) (8,11)^2 - 4 \cdot (4,555)^2 = (8,11)^2 - (2 \cdot 4,555)^2 = (8,11 - 9,11)(8,11 + 9,11) = \underline{-17,22}.$$

$$3. а) P = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3 = (3x^2 + 7x - 1 - 3x^2 - 5x + 1)^3 = (2x)^3;$$

$$P(0,2) = (2 \cdot 0,2)^3 = 0,4^3 = \underline{0,064}.$$

$$б) P = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3 = (7x^2 + 5x - 10 - 7x^2 - 2x + 10)^3 = (3x)^3;$$

$$P(0,1) = (3 \cdot 0,1)^3 = 0,3^3 = \underline{0,027}.$$

4. Найдите значение выражения:

а)

$$\frac{27x^3 + y^3}{9x^2 - 3xy + y^2} - \frac{27x^3 - y^3}{9x^2 + 3xy + y^2} = \frac{(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)}{9x^2 - 3xy + y^2} - \frac{(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)}{9x^2 + 3xy + y^2} = 3x + y - (3x - y) = \underline{2y}$$

б)

$$\frac{8x^3 + y^3}{4x^2 - 2xy + y^2} + \frac{8x^3 - y^3}{4x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)}{4x^2 - 2xy + y^2} + \frac{(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)}{4x^2 + 2xy + y^2} = 2x + y + 2x - y = \underline{4x}$$

➤ **Квадратные уравнения. Формулы Виета.**

5. Решите квадратное уравнение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$D = 49$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$\underline{x_1 = 3} \quad \underline{x_2 = -\frac{1}{2}}$$

б) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}}$$

в) $5x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5 < 0,$$

$$\underline{x \in \emptyset}$$

г) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$D = 49$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$\underline{x_1 = 2} \quad \underline{x_2 = -\frac{1}{3}}$$

д) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$(3x - 1)^2 = 0$$

$$3x - 1 = 0$$

$$\underline{x = \frac{1}{3}}$$

е) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

$$D = 9 - 32 < 0$$

$$\underline{x \in \emptyset}$$

6. Верно ли, что число $x_1 = -1$ является корнем уравнения:

а) $x^2 + 100x + 99 = 0$, $(-1)^2 + 100 \cdot (-1) + 99 = 0$ верно

$$x_1 + x_2 = -100$$

$$-1 + x_2 = -100; \quad x^2 + 100x + 99 = \underline{(x+1)(x+99)}$$

$$\underline{x_2 = -99}$$

б) $x^2 - 5x - 6 = 0$, $(-1)^2 + 5 - 6 = 0$ верно

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$-1 + x_2 = 5; \quad x^2 - 5x - 6 = \underline{(x+1)(x-6)}$$

$$\underline{x_2 = 6}$$

7. а) $x^2 - 12x + 4 = 0$

$$x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4$$

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = x_1 x_2 ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) = 4(12^2 - 2 \cdot 4) = \underline{544}$$

б) $x^2 - 12x + 2 = 0$

$$x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = 2(12^2 - 3 \cdot 2) = \underline{276}.$$

➤ Дробно-рациональные уравнения

8. Решите уравнения:

$$а) \frac{x^2 - 25}{x^3 + 4x^2 + 25} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x^3 + 4x^2 + 25 \neq 0 \end{cases}$$

$$x = 5 \text{ или } x = -5$$

Проверка знаменателя:

$$x = 5, \text{ то } 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 25 \neq 0$$

$$x = -5, \text{ то } \begin{aligned} (-5)^3 + 4 \cdot (-5)^2 + 25 &= \\ &= 5^2 \cdot (-5 + 4 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 5

$$б) \frac{x^2 - 36}{x^3 + 5x^2 + 36} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 - 36 = 0 \\ x^3 + 5x^2 + 36 = 0 \end{cases}$$

$$x = 6 \text{ или } x = -6$$

Проверим знаменатель

$$x = 6, 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 36 \neq 0, \text{ верно}$$

$$x = -6, \begin{aligned} (-6)^3 + 5 \cdot (-6)^2 + 36 &= \\ &= 6^2(-6 + 5 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 6

$$в) \frac{x-1}{x-3} - \frac{3}{x-2} = 1;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 3, x \neq 2$$

$$(x-1)(x-2) - 3(x-3) = (x-3)(x-2)$$

$$x^2 - 3x + 2 - 3x + 9 - x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$-x + 5 = 0$$

$$\underline{x = 5} \in \text{ОДЗ}$$

$$г) \frac{x-1}{x-6} - \frac{6}{x-4} = 1;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 6, x \neq 4$$

$$(x-1)(x-4) - 6(x-6) = (x-6)(x-4)$$

$$x^2 - 5x + 4 - 6x + 36 - x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$-x + 16 = 0$$

$$\underline{x = 16} \in \text{ОДЗ}$$

$$д) \frac{x}{x-2} - \frac{3x-8}{x^2-5x+6} = 0;$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3x-8}{(x-2)(x-3)} = 0 \left| \cdot (x-2)(x-3) \right.$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 2, x \neq 3$$

$$x(x-3) - (3x-8) = 0$$

$$x^2 - 3x - 3x + 8 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 2 \notin \text{ОДЗ} \quad x_2 = 4 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 4

$$е) \frac{x}{x-1} - \frac{4x-5}{x^2-3x+2} = 0.$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)} = 0 \left| \cdot (x-1)(x-2) \right.$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 1, x \neq 2$$

$$x(x-2) - (4x-5) = 0$$

$$x^2 - 2x - 4x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_1 = 2 \notin \text{ОДЗ} \quad x_2 = 3 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 3