

Дробно-рациональные уравнения

■ Примеры

Решите уравнения:

№1. Найдите корень уравнения $\frac{x-46}{x+2} = -2$.

№2. Найдите корень уравнения $x = \frac{-7x-8}{x-16}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№3. Найдите корень уравнения $\frac{9}{x^2-16} = 1$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№4. Найдите корень уравнения $\frac{7x}{2x^2-15} = 1$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

№5. Найдите корень уравнения $\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

№6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$.

№7. Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-5} = 4$.

№8. Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$.

№1.

$$\frac{x-46}{x+2} = -2$$

ОДЗ: $x \neq -2$

$$x - 46 = -2(x + 2)$$

$$x - 46 = -2x - 4$$

$$3x = 42$$

$$x = 14 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 14.

№2.

$$x = \frac{-7x-8}{x-16}$$

ОДЗ: $x \neq 16$

$$x(x-16) = -7x-8$$

$$x^2 - 16x + 7x + 8 = 0$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 9 = 1 + 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = 8 = 1 \cdot 8$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 8$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

$x = 1$ меньший корень

Ответ: 1.

№3.

$$\frac{9}{x^2-16} = 1.$$

$$\frac{9}{x^2-16} = 1 \quad | \cdot (x^2-16)$$

$$9 = x^2 - 16$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x-5)(x+5) = 0$$

$$x = 5 \text{ или } x = -5$$

Проверка:

$$x = 5, \quad \frac{9}{5^2-16} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1 \text{ верно}$$

$$x = -5, \quad \frac{9}{(-5)^2-16} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1 \text{ верно}$$

Меньший корень: -5

Ответ: -5.

№4.

$$\frac{7x}{2x^2-15} = 1$$

$$\frac{7x}{2x^2-15} = 1 \quad | \cdot (2x^2-15)$$

$$7x = 2x^2 - 15$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \begin{cases} 5 \\ -1,5 \end{cases}$$

Проверка:

$$x = 5; \quad 2x^2 - 15 = 2 \cdot 5^2 - 15 \neq 0$$

$$x = -1,5; \quad 2x^2 - 15 = 2 \cdot (-1,5)^2 - 15 \neq 0$$

Большой корень: 5

Ответ: 5.

№5.

$$\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$$

$$\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7} \quad | \cdot (7x-2)(6x-7)$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{2}{7}, \quad x \neq \frac{7}{6}$$

$$(x-8)(6x-7) = (x-8)(7x-2)$$

$$(x-8)(6x-7) - (x-8)(7x-2) = 0$$

$$(x-8)(6x-7-(7x-2)) = 0$$

$$x-8=0 \quad \text{или} \quad 6x-7-7x+2=0$$

$$x=8 \quad \quad \quad -x-5=0$$

$$x=-5$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Больший корень: 8

Ответ: 8.

№6.

$$\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } 9x-7 \neq 0$$

$$x \neq \frac{7}{9}$$

$$9x-7=2$$

$$9x=9$$

$$x=1$$

Ответ: 1.

№7.

$$\frac{1}{7x-5} = 4.$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{7x-5} = \frac{4}{1}$$

$$4(7x-5)=1$$

$$28x-20=1$$

$$28x=21$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x = 0,75$$

Ответ: 0,75.

№8.

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$$

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$$

$$3x-4=4x-11$$

$$11-4=4x-3x$$

$$x=7$$

Проверка:

$$\frac{1}{3 \cdot 7 - 4} = \frac{1}{4 \cdot 7 - 11}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{17}, \quad \text{верно}$$

Ответ: 7.

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $\frac{x-105}{x+3} = -5$

№2. $x = \frac{-4x-18}{x-13}$

№3. $\frac{5}{x^2-20} = 1$

№4. $\frac{14x}{x^2+13} = 1$

№5. $\frac{x+8}{6x-5} = \frac{x+8}{4x-11}$

№6. $\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}$

№7. $\frac{1}{10x-4} = 10$

№8. $\frac{1}{7x+13} = \frac{1}{4x-5}$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $\frac{x+71}{x+1} = -4$

№2. $x = \frac{-3x+48}{x-1}$

№3. $\frac{8}{x^2+4} = 1$

№4. $\frac{6x}{x^2-16} = 1$

№5. $\frac{x-5}{6x+5} = \frac{x-5}{5x-8}$

№6. $\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{11}$

№7. $\frac{1}{10x-4} = 10$

№8. $\frac{1}{4x-3} = \frac{1}{9x-11}$

▪ **Ответы (тест)** Дробно-рациональные уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
Вар.1	15	3 и 6	± 5	1 и 13	-8 и -3	0,5	0,41	-6
Вар.2	-15	-8 и 6	± 2	-2 и 8	-13 и 5	5	-1,45	1,6

▪ **Решение (тест)** Дробно-рациональные уравнения

Вариант 1

№1.

$$\frac{x-105}{x+3} = -5$$

$$x-105 = -5(x+3), x \neq -3$$

$$x-105 = -5x-15$$

$$x+5x = 105-15$$

$$6x = 90 \quad \underline{x=15} \in \text{ОДЗ}$$

№3.

$$\frac{5}{x^2-20} = 1$$

$$5 = x^2 - 20$$

$$x^2 = 25$$

$$\underline{x = \pm 5}$$

Проверка: $\left| \begin{array}{l} x=5, \frac{5}{5^2-20} = 1, 1=1 \\ x=-5, \frac{5}{(-5)^2-20} = 1, 1=1 \end{array} \right.$

№5.

$$\frac{x+8}{6x-5} = \frac{x+8}{4x-11}$$

$$(x+8)(4x-11) = (x+8)(6x-5)$$

$$(x+8)(4x-11-(6x-5)) = 0$$

$$4x-11-6x+5 = 0$$

$$x+8 = 0$$

$$x = -8 \in \text{ОДЗ}$$

или $-2x-6 = 0$

$$x = -3 \in \text{ОДЗ}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x-5 \neq 0 \\ 4x-11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{6} \\ x \neq \frac{11}{4} \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{-8; -3\}$$

№2.

$$x = \frac{-4x-18}{x-13}$$

$$x(x-13) = -4x-18, x \neq 13$$

$$x^2-13x+4x+18 = 0$$

$$x^2-9x+18 = 0$$

$$\underline{x_1 = 3} \quad \underline{x_2 = 6} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{14x}{x^2+13} = 1$$

$$14x = x^2+13, x^2+13 \neq 0 \text{ при } \forall x$$

$$x^2-14x+13 = 0$$

$$\underline{x_1 = 1} \quad \underline{x_2 = 13}$$

№6.

$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}; 10x+7 \neq 0, x \neq -0,7$$

$$10x+7 = 12$$

$$10x = 5$$

$$\underline{x = 0,5} \in \text{ОДЗ}$$

№7.

$$\frac{1}{10x-4} = 10$$

$$\frac{1}{10x-4} = \frac{10}{1}; 10x-4 \neq 0, x \neq 0,4$$

$$10(10x-4) = 1$$

$$100x - 40 = 1$$

$$100x = 41$$

$$\underline{x = 0,41} \in \text{ОДЗ}$$

№8.

$$\frac{1}{7x+13} = \frac{1}{4x-5}$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq -\frac{13}{7}, x \neq \frac{5}{4}$$

$$7x+13 = 4x-5$$

$$3x = -18$$

$$\underline{x = -6} \in \text{ОДЗ}$$

Вариант 2

№1.

$$\frac{x+71}{x+1} = -4$$

$$x+71 = -4(x+1), x \neq -1$$

$$x+71 = -4x-4$$

$$x+4x = -71-4$$

$$5x = -75 \quad \underline{x = -15} \in \text{ОДЗ}$$

№2.

$$x = \frac{-3x+48}{x-1}$$

$$x(x-1) = -3x+48, x \neq 1$$

$$x^2 - x + 3x - 48 = 0$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\underline{x_1 = 6} \quad \underline{x_2 = -8} \in \text{ОДЗ}$$

№3.

$$\frac{8}{x^2+4} = 1$$

$$8 = x^2 + 4, x^2 + 4 \neq 0 \text{ при } \forall x$$

$$x^2 = 4$$

$$\underline{x = \pm 2} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{6x}{x^2-16} = 1$$

$$6x = x^2 - 16; x \neq 4, x \neq -4$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\underline{x_1 = 8} \quad \underline{x_2 = -2} \in \text{ОДЗ}$$

№5.

$$\frac{x-5}{6x+5} = \frac{x-5}{5x-8}$$

$$(x-5)(5x-8) = (x-5)(6x+5); x \neq \frac{8}{5}, x \neq -\frac{5}{6}$$

$$(x-5)(5x-8-6x-5) = 0$$

$$\underline{x = 5} \in \text{ОДЗ} \quad \text{или} \quad -x-13 = 0$$

$$\underline{x = -13} \in \text{ОДЗ}$$

№6.

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{11}$$

$$11 = 3x - 4, x \neq \frac{4}{3}$$

$$3x = 15$$

$$\underline{x = 5} \in \text{ОДЗ}$$

№7.

$$\frac{1}{4x+6} = 5$$

$$\frac{1}{4x+6} = \frac{5}{1}, x \neq -1,5$$

$$5(4x+6) = 1$$

$$20x + 30 = 1$$

$$20x = -29$$

$$\underline{x = -1,45 \in \text{ОДЗ}}$$

№8.

$$\frac{1}{4x-3} = \frac{1}{9x-11}$$

$$4x-3 = 9x-11; x \neq \frac{3}{4}, x \neq \frac{11}{9}$$

$$11-3 = 9x-4x$$

$$8 = 5x$$

$$\underline{x = 1,6 \in \text{ОДЗ}}$$