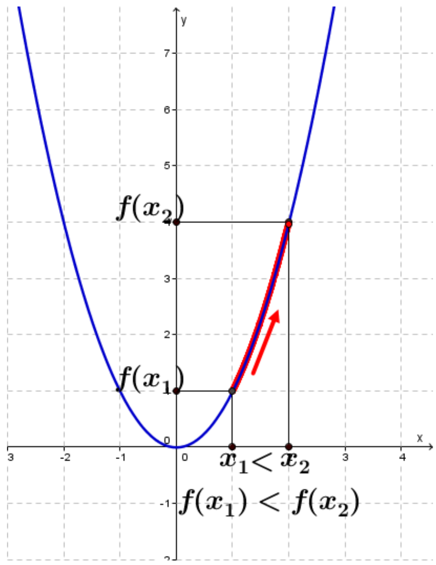
Свойства функций

- *Функцию $y = f(x)$ называют* ***<u>возрастающей</u>*** *на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.*

  Или:

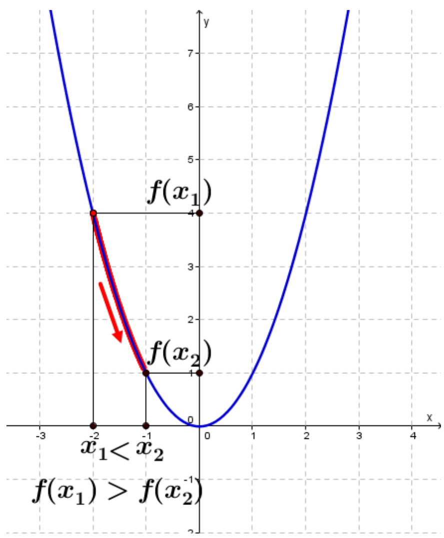
  *функция **возрастает**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.*



- *Функцию $y = f(x)$ называют* ***<u>убывающей</u>*** *на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.*

  Или:

  *функция **убывает**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.*

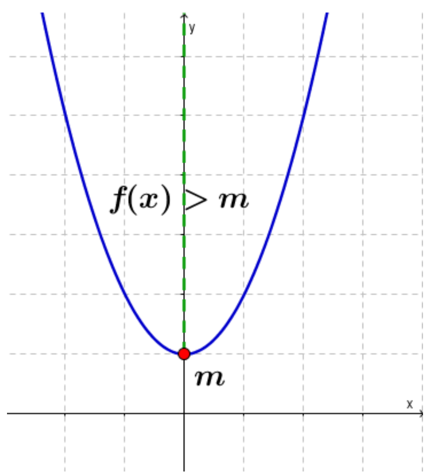


Общее название возрастающих и убывающих функций - ***<u>монотонные</u>*** *функции.*

- *Функцию $y = f(x)$ называют* ***<u>ограниченной</u> <u>снизу</u>*** *на множестве $X \subset D(f)$, если все значения этой функции на множестве X больше некоторого числа.*

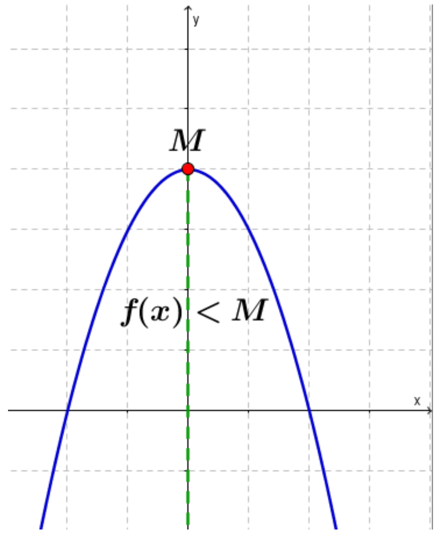
  Или:

  *Существует такое число **m**, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.*

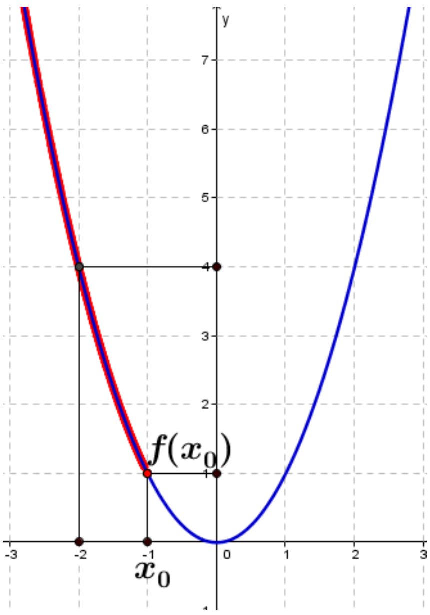


- *Функцию* $y = f(x)$ *называют* ***ограниченной сверху*** *на множестве* $X \subset D(f)$, *если все значения этой функции на множестве X меньше некоторого числа.*
Или:
*Существует такое число **M**, что для любого значения* $x \in X$ *выполняется неравенство*
$f(x) < M$.

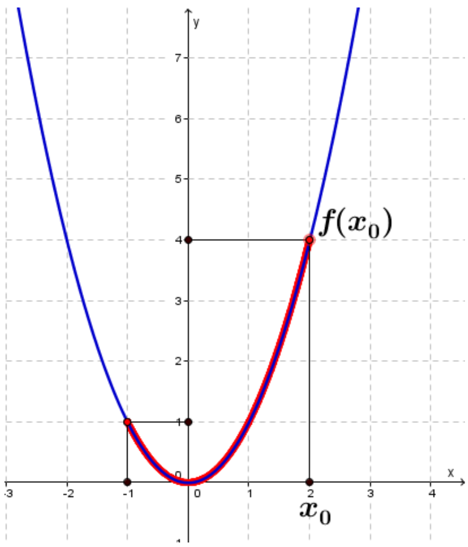
Если функция ограничена и сверху и снизу на всей области определения, то ее называют ***ограниченной.***



- *Число m называют* ***наименьшим значением функции*** $y = f(x)$ *на множестве* $X \subset D(f)$, *если существует такое* $x_0 \subset X$, *что*
$f(x_0) = m$ *и* $f(x) \geq f(x_0)$.
$y_{наим} = f(x_0) = m$

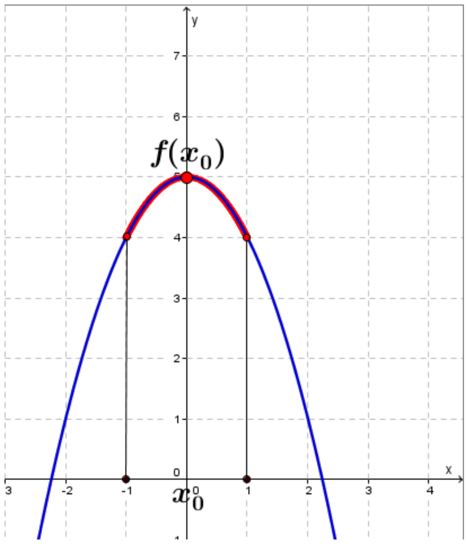


- *Число M называют* ***наибольшим значением функции*** $y = f(x)$ *на множестве* $X \subset D(f)$, *если существует такое* $x_0 \subset X$, *что*
$f(x_0) = M$ *и* $f(x) \leq f(x_0)$.
$y_{наиб} = f(x_0) = M$



- *Точку* x_0 *называют* ***<u>точкой максимума функции</u>*** $y = f(x)$, *если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой* $f(x) < f(x_0)$.

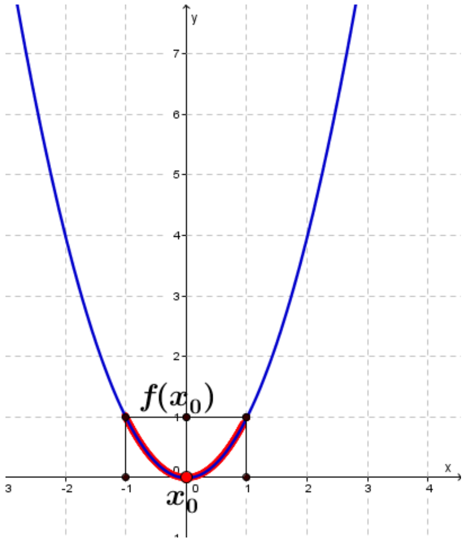
  $y_{\max} = f(x_0)$

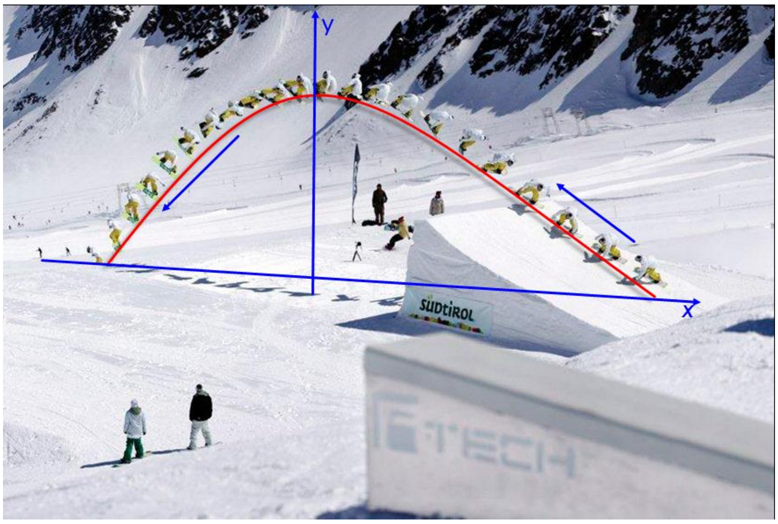


- *Точку* x_0 *называют* ***<u>точкой минимума функции</u>*** $y = f(x)$, *если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой* $f(x) > f(x_0)$.

  $y_{\min} = f(x_0)$

Общее название точек минимума и максимума – ***<u>точки экстремума.</u>***





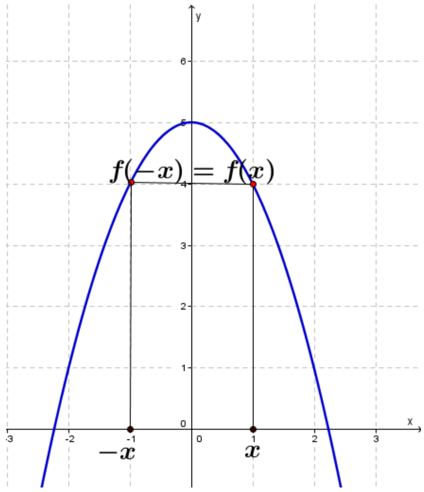
"Экстремальные виды спорта" или "экстрим"?
(Текст Эксперт http://textexpert.ru)

Слово «экстремальный» пришло в русский язык еще задолго до появление слова «экстрим». Своему появлению оно обязано латинскому слову «extremus», что означает «крайний», и которое пришло к нам благодаря французскому языку. Именно это способствовало возникновению таких слов, как «экстремум», который отображает крайние (максимальное и минимальное) значения функции, и «экстремизм», который указывает на крайние взгляды или меры в своих целях.

Слово «экстрим» появилось же в русском языке не так давно и уже от английского «extreme», которое в переводе означает «крайность». При этом стоит отметить, что «экстрим» имеет больше отношение к спорту, нежели к математике и политике. Так что под значением этого слова понимается спорт, который связан с некоторой опасностью для жизни человека. Но при этом все те, кто любит экстрим называют себя экстремалами, экстремальщиками.

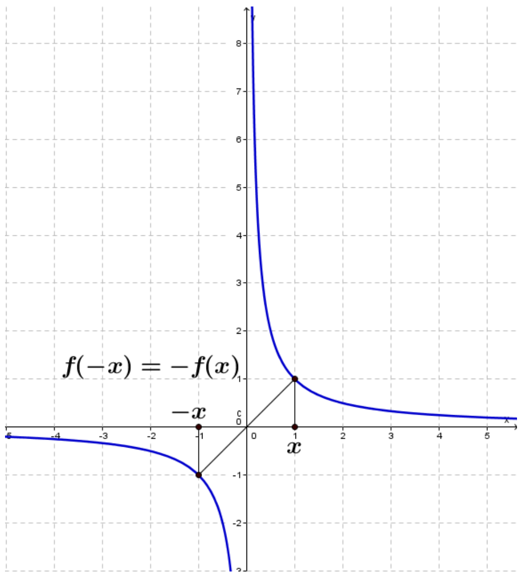
- *Функцию $y = f(x)$ называют **<u>четной</u>**, если для любого $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$.*

  График четной функции симметричен относительно оси ординат.

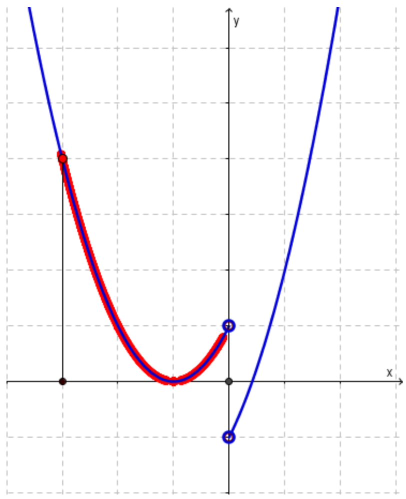


- *Функцию $y = f(x)$ называют **<u>нечетной</u>**, если для любого $x \in D(f)$ $f(-x) = -f(x)$.*

  График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



- ***<u>Непрерывность</u>** функции на промежутке X – означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва (т.е. представляет собой сплошную линию).*



- *Теорема 1.*
  Если каждая из двух функций возрастает на промежутке X, то их сумма также возрастает на этом промежутке.

- *Теорема 2.*
  Если функция $y = f(x)$ возрастает или убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = a$ не может иметь более одного корня на X.
  Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X, а функция $y = g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь более одного корня.

- *Теорема 3.*
  Если функция $y = f(x)$, $y = g(x)$ определены на множестве X и наибольшее значение одной из этих функций на X, равное A, совпадает с наименьшим значением другой функции на том же множестве, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно на X системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Задачи

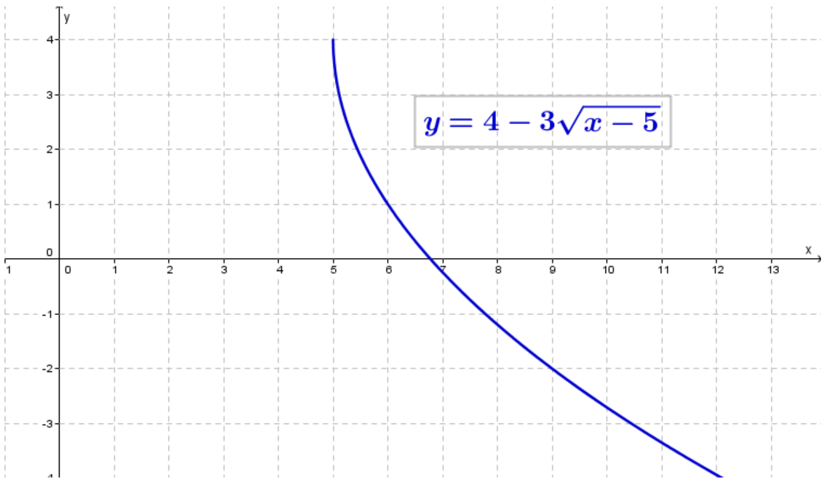
(учебник «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Часть 2 Задачник 10 класс» Мордкович А.Г. и др.)

№8.21. Исследуйте функцию $y=4-3\sqrt{x-5}$ и постройте ее график.

1. $D(y)$: $x\geq 5$
2. $y(-x)=4-3\sqrt{-x-5}$ ни четная, ни нечетная.
3. $E(y)=(-\infty;4]$

$$\sqrt{x-5}\geq 0$$
$$-3\sqrt{x-5}\leq 0$$
$$4-3\sqrt{x-5}\leq 4$$
$$y\leq 4$$

4. Убывает при $x\geq 5$;
   ограничена сверху;
   $y_{наиб.}=4$ при $x=5$;
   непрерывна на всей $D(y)$.



№8.29. Пусть функция $y=f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Решите:

а) Уравнение $f(3x+2)=f(4x^2+x)$.

Для монотонных функций: из равенства значений функции следует равенство аргументов. Значит,

$$3x+2=4x^2+x$$
$$2x^2-x-1=0$$
$$\underline{x_1=1}\quad \underline{x_2=-0,5}$$

б) Неравенство $f(3x+2)<f(4x^2+x)$.

Для **возрастающей** функции: большему значению функции соответствует большее значение аргумента. Значит, сравнивая аргументы, **знак неравенства не меняем.**

$$3x+2<4x^2+x$$
$$2x^2-x-1>0$$
$$(x-1)(x+0,5)>0$$
$$\underline{x\in(-\infty;-0,5)\cup(1;\infty)}$$

№8.30. Пусть функция $y=f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$.

Решите:

а) Неравенство $f\left(\frac{1}{3x^2+4x-7}\right)\geq f\left(\frac{1}{2x^2+3x-5}\right)$.

Для **убывающей** функции: большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента. Значит, сравнивая аргументы, **знак неравенства меняем.**

$$\frac{1}{3x^2+4x-7}\leq\frac{1}{2x^2+3x-5}$$

$$\frac{1}{3(x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right)}-\frac{1}{2(x-1)(x+2{,}5)}\leq 0$$

$$\frac{x+2}{(x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right)(x+2{,}5)}\leq 0$$

$$\underline{x\in(-\infty;-2{,}5)\cup\left(-2\frac{1}{3};-2\right]\cup(1;\infty)}$$

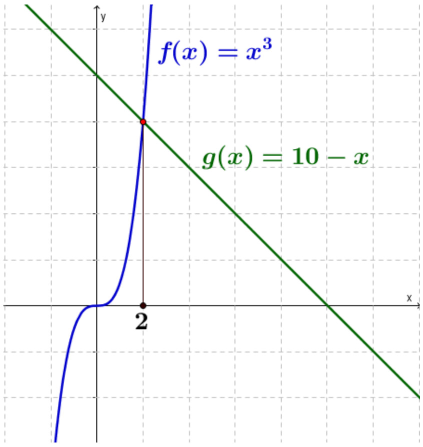
№8.34. Решите уравнение $x^3=10-x$.

б) Т.к. $f(x)=x^3$ $(\uparrow)$ возрастает на $\mathbb{R}$, а $g(x)=10-x$ $(\downarrow)$убывает на $\mathbb{R}$, то уравнение не может иметь более одного корня.

Пусть $x=2$.

Проверка: $\begin{aligned}2^3&=10-2\\8&=8,\end{aligned}$ верно.

Тогда $x=2$ - корень уравнения.



Ответ: 2.

№8.35. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=23-2x$:

а) Т.к. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-5}$ $(\uparrow)$ возрастает на $[5;\infty)$, как сумма двух возрастающих функций, а $g(x)=23-2x$ $(\downarrow)$ убывает на $[5;\infty)$, то уравнение не может иметь более одного корня.

Пусть $x=9$.

Проверка: $\begin{aligned}\sqrt{9}+\sqrt{9-5}&=23-2\cdot9\\5&=5,\end{aligned}$ верно. Тогда $x=9$ - корень уравнения.

Ответ: 9.

№8.52. Решите уравнение $\sqrt{x^{100}+49}=7-x^4$**.**

а) Пусть $f(x)=\sqrt{x^{100}+49}$.

Найдем множество значений функции $f(x)$.

$$x^{100}\ge 0$$
$$x^{100}+49\ge 49$$
$$\sqrt{x^{100}+49}\ge\sqrt{49}$$
$$f(x)\ge 7$$
$$f_{наим}=7$$

Пусть $g(x)=7-x^4$.

Найдем множество значений функции $g(x)$.

$$-x^4\le 0$$
$$7-x^4\le 7$$
$$g(x)\le 7$$
$$g_{наиб}=7$$

Тогда исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^{100}+47}=7\\ 7-x^4=7\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0.

№8.52. Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x+5}=1+2x-x^2$**.**

б) Пусть $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$.

$$\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4}\ge 2$$
$$f_{наим}=2$$

Пусть $g(x)=1+2x-x^2$.

$$g(x)=1+2x-x^2=-(x-1)^2+2\le 2.$$
$$g_{наиб}=2$$

Тогда исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+5}=2\\ 1+2x-x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: 1.

Доп. Задание: Исследуйте функцию на четность.

а) $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2+1}$

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-2\cdot(-x)}{(-x)^2+1}=$$
$$=\frac{-x^3+2x}{x^2+1}=-\frac{x^3-2x}{x^2+1}=-f(x)$$

Нечетная функция.

б) $f(x)=x^4-|x|+1$

$$f(-x)=(-x)^4-|-x|+1=$$
$$=x^4-|x|+1=f(x)$$

Четная функция.

в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{-(x+1)}{-(x-1)}=$$
$$=\frac{x+1}{x-1}$$

Ни четная, ни нечетная функция.